ASSOCIATION POUR L'ÉTUDE DE LA PALÉONTOLOGIE
ET DE LA STRATIGRAPHIE HOUILLÈRES

PUBLICATION N° 12

Contribution à l'Étude biométrique de *Lingula Mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique

PAR

CHARLES DELEERS
Licencié en Sciences mathématiques,
Actuaire.

ET

ANDRÉ PASTIELS
Docteur en Sciences naturelles.

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères	Bruxelles	1952	Public. N° 12	67 p.	13 pl.

AVIS

Ouvrage édité et distribué par l'Association pour l'Etude de la Paléontologie et de la Stratigraphie Houillères, rue Vautier, 31, Bruxelles.

Tous droits réservés.

AOÛT 1952.

BERICHT

Verhandeling uitgegeven en uitgedeeld door de Vereniging voor de Studie der Paleontologie en der Stratigraphie van de Steenkolenformatie, Vautierstraat, 31, Brussel.

Alle rechten voorbehouden.

AUGUSTUS 1952.

NOTICE

Publication printed and distributed by the Association for the Study of the Paleontology and the Stratigraphy of the Coal Measures, Vautier street, 31, Brussels.

This is copyright.

AUGUST 1952.

RECHERCHE EXÉCUTÉE SOUS LES AUSPICES
DE L'INSTITUT POUR L'ENCOURAGEMENT DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
DANS L'INDUSTRIE ET L'AGRICULTURE.

EN HOMMAGE

à la

Société d'Ougrée-Marihaye et aux Sociétés

du Groupe Brufina-Cofinindus

qui ont subventionné la publication du présent Mémoire.

ASSOCIATION POUR L'ÉTUDE DE LA PALÉONTOLOGIE
ET DE LA STRATIGRAPHIE HOUILLÈRES

PUBLICATION N° 12

Contribution
'Étude biométrique de *Lingula Mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique

PAR

CHARLES DELEERS ET ANDRÉ PASTIELS

Licencié en Sciences mathématiques, Actuaire.

Docteur en Sciences naturelles.

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères	Bruxelles	1952	Public. N° 12	67 p.	13 pl.

RECHERCHE EXÉCUTÉE SOUS LES AUSPICES

DE L'INSTITUT POUR L'ENCOURAGEMENT DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE DANS L'INDUSTRIE ET L'AGRICULTURE.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE IV.

INTRODUCTION

Dans une étude précédente, consacrée à un Lamellibranche dulcaquicole de la faune houillère, nous avons rappelé qu'« en paléontologie, les exigences actuelles de la détermination spécifique sont celles d'une discrimination toujours plus précise et plus fine, exercée, non plus sur des individus isolés, mais sur des collections abondantes ».

L'importance numérique des sujets nécessaires est justifiée par le caractère collectif des espèces sur lequel insiste, en paléozoologie, la systématique moderne.

Les populations de Brachiopodes et de Lamellibranches carbonifériens sont des mélanges d'individus réunis tantôt par des facteurs écologiques, tantôt par le fait de ségrégations mécaniques, quelquefois dus simultanément à plusieurs de ces agents sans que l'influence exacte de l'un d'eux puisse toujours être bien mise en évidence. A défaut de connaître la signification biocénotique de ces synusies, les populations qu'elles contiennent ne sont plus, comme en zoologie, des « collections de génotypes stables », mais simplement des « collections de coquilles », des thanatocœnoses.

Dans l'examen de ces Brachiopodes et de ces Lamellibranches, la discrimination spécifique porte essentiellement sur des caractères conchyliologiques, à savoir : la taille, les proportions, l'appareil cardinal, l'ornementation et la structure des tests, tous traits morphologiques qui subissent avec fruit l'examen biométrique.

La définition de ces objets devient une appréciation synthétique de données conchyliométriques et l'étude de leur variabilité devient un problème très complexe de statistique et de probabilité.

Toute la valeur logique de l'emploi des méthodes statistiques en biologie a été remarquablement présentée dans un récent ouvrage d'E. Morice, M. Tisserand et J. Reboul [1]. Pour attirer à nouveau l'attention des paléontologues sur la grande utilité de ces méthodes, nous ne pouvons mieux faire que de reprendre les idées maîtresses de l'introduction de cet ouvrage que nous condensons ici.

---

[1] Morice, E., Tisserand, M. et Reboul, J., 1947, pp. xv à xvii.

« Assez souvent on entend dire que l'usage des méthodes statistiques *n'est pas justifié*, en raison de la *précision insuffisante* des données initiales; la matière à observer est trop grossière pour justifier l'emploi d'un outil de précision. Ceci peut être vrai dans certains cas, mais cependant cette affirmation n'est pas logique : l'outil statistique n'est pas un *simple instrument de calcul*, mais un *moyen d'investigation critique* de la validité des calculs élémentaires auxquels peuvent donner lieu les données, et c'est précisément parce que ces observations sont loin d'avoir une valeur absolue qu'il est nécessaire de les soumettre à cette *méthode critique*.

» Dans tous les cas une analyse statistique élémentaire, conduite logiquement et avec soin, sera toujours une aide précieuse pour étudier la *signification* et les *limitations* des conclusions tirées des observations brutes.

» Faute de pouvoir appliquer la méthode expérimentale *lorsqu'on n'est pas maître des circonstances principales des observations*, on *applique la méthode statistique* qu'on peut considérer comme constituée par les méthodes applicables à l'étude numérique des ensembles de faits nombreux, c'est-à-dire des phénomènes de masse. »

Dans le cas envisagé dans notre étude, en morphologie, pour un temps long encore, « il faut se contenter de *classer les faits observés* d'après leurs affinités apparentes, de noter leurs modalités différentes dans chaque catégorie, de *comparer* entre elles les collectivités de faits ainsi classés. On est *loin ici* du *cas limite...*, où ce phénomène étudié semble dépendre d'une *cause déterminante unique*, facile à isoler, où la méthode expérimentale pourrait s'appliquer avec rigueur; il est d'autant plus nécessaire néanmoins d'apporter *quelque rigueur dans les classements* et les comparaisons auxquels donnent lieu les phénomènes complexes. C'est le but de la méthode statistique. *Elle devient l'unique méthode de recherche* quand s'accroît la complexité des causes qui régissent le phénomène. Elle aide à établir une *hiérarchie entre les causes multiples* de ce phénomène, elle fait apparaître des *rapports significatifs* sur quoi se basent les *inductions* et qui autorisent aussi des *prévisions* ». L'expérience n'affranchit pas de la biométrie. Le grand physicien anglais Lord Kelvin se plaisait à répéter : « I often say that if you measure that of which you speak, you know something of your subject; but if you cannot measure it, your knowledge is meager and unsatisfactory ».

L'introduction de méthodes biométriques en paléontologie a ouvert à cette branche des sciences naturelles de larges horizons qu'il convient d'explorer très méthodiquement dans la recherche du progrès.

Dans l'étude des Lamellibranches ou des Brachiopodes fossiles, ce travail doit être fort attentif, d'une part, pour exercer un choix judicieux des méthodes statistiques les plus efficaces, d'autre part, pour approfondir nos connaissances de la morphologie conchyliologique.

*
* *

En Belgique, depuis 1844, date de la parution du très important mémoire de L. G. De Koninck sur la faune du Carbonifère de la Belgique, le nombre d'espèces de Lingules reconnues dans les terrains de cette époque est passé de deux à sept. Ce fut là l'œuvre de M. le Prof. F. Demanet, qui a distingué dans ces terrains la présence de *Lingula elliptica* Phillips, *Lingula parallela* Phillips, *Lingula straeleni* Demanet, *Lingula squamiformis* Phillips, *Lingula elongata* Demanet, *Lingula mytilloides* Sowerby, *Lingula pringlei* Muir-Wood. Les quatre dernières espèces citées sont présentes dans les assises de l'Étage westphalien.

Si le nombre de formes rencontrées au Carbonifère est très limité, la difficulté de leur détermination exacte subsiste de nos jours par les petites dimensions des valves de ces Brachiopodes; elle entraîne aussi une connaissance imprécise de leur répartition stratigraphique. Dans une importante étude sur les Brachiopodes du Dinantien de la Belgique, parue en 1934 dans les Mémoires du Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique, M. F. Demanet a écrit : « Les différences existant entre les Lingules signalées dans le Dinantien ont trait aux dimensions, à la forme du contour et à l'ornementation des valves. Ces différences ne sont pas facilement discernables; aussi l'autonomie des espèces créées par les auteurs et surtout par Phillips a-t-elle été mise en doute... A notre avis, si dans le genre *Lingula* les différences spécifiques ne sont pas très marquantes, ce n'est pas une raison pour les négliger. Au contraire, si ce genre, connu depuis le Paléozoïque, subsiste encore de nos jours, c'est grâce à sa fixité, à son manque de fortes variations ». Toutes les observations faites et les opinions des chercheurs sont bien concordantes sur ces points. D'une part, la difficulté d'appréciation des caractères différentiels, d'autre part, l'évolution lente et faible, la bradytélie du genre à travers l'évolution du monde vivant ont détourné les recherches de l'établissement de la diagnose précise de ces espèces.

Le même auteur écrit encore, à propos de leur discrimination : « Dès lors, il est rationnel de donner une valeur spécifique à certains caractères différentiels peu apparents, qui, dans d'autres genres moins stables, ne dépasserait pas le cadre de la variété ».

De notre côté, à quinze ans d'intervalle, avec l'introduction en paléontologie des méthodes statistiques, nous avons estimé profitable d'essayer de délimiter et de définir d'une façon totalement objective ceux des « caractères différentiels peu apparents » ayant trait à la forme et aux dimensions. En effet, le simple examen visuel à la loupe, voire au microscope binoculaire, de formes géométriques aussi petites (quelques millimètres ou fractions de millimètre) délimitées par des segments d'arc est fallacieux. Le coefficient d'erreur de l'appréciation visuelle dépasse souvent la valeur des fluctuations relatives de grandeur des contours à apprécier. L'obtention de données dimensionnelles par de nouvelles méthodes, triées ensuite par l'analyse statistique, nous a semblé permettre seule, pour le moment, le classement de grandeurs et de caractères peu différents, sui-

vant leur valeur relative comme suivant leurs relations dans la morphologie des valves. La méthode présentée se révèle d'un appoint considérable pour porter des jugements d'identité. Poussant assez loin cette analyse morphologique, avec le concours de méthodes stéréophotogrammétriques, elle a apporté des éléments importants qui ont permis une meilleure caractérisation de l'espèce de Lingule examinée.

L'essai des méthodes nouvelles d'examen mises en œuvre a porté sur *Lingula mytilloides* SOWERBY, espèce ubiquiste au Westphalien.

Contribution
à l'Étude biométrique de *Lingula Mytilloides* Sowerby
du Westphalien de la Belgique

CHAPITRE PREMIER

Connaissances sur *Lingula Mytilloides* du Carbonifère de la Belgique.

---

§ 1. CLASSIFICATION ZOOLOGIQUE.

Pour toutes les questions de nomenclature zoologique, ayant trait au Brachiopode étudié, on s'en référera au « Fossilium Catalogus », I. Animalia, Pars 42, Brachiopoda, par Charles Schuchert et Clara M. Le Vene. Rappelons que la place des *Lingula* dans la classification zoologique systématique s'établit comme suit : Classe Brachiopodes Cuvier, 1802, 1805 — Ordre 2 : *Atremata* Beecher, 1891, Superfamille : *Lingulacea* Waagen, 1885, Famille : *Lingulidæ* Gray, 1840, Genre : *Lingula* Bruguière, 1792.

§ 2. CARACTÈRES GÉNÉRAUX DES « LINGULA » DU CARBONIFÈRE.

Les meilleures observations et descriptions des caractères généraux des *Lingula* du Carbonifère ont été faites par Th. Davidson (2) (3). Aussi nous ne nous arrêterons plus ici qu'aux caractères dimensionnels présentés par les auteurs (4).

Les premières données numériques sur la taille des *Lingula* de ces assises mentionnées dans la littérature paléontologique belge sont dues à L. De Koning.

---

(2) Davidson, Th., 1858-1863 pp. 205-210.

(3) Id., 1861, pp. 61-63.

(4) Pour les notations utilisées dans le présent travail, voir chap. III, § 1, p. 36, fig. 5.

Dans sa célèbre « Description des animaux fossiles du terrain carbonifère de Belgique », il a donné les rapports dimensionnels de deux individus rencontrés l'un dans l'assise du Viséen, l'autre dans le Namurien, et qui sont les suivants :

L. mytilloides SOWERBY	$l >$ 20 mm	$\frac{c}{l} = \frac{3,4}{6}$. (5)
L. parallela PHILLIPS	$l >$ 10-12 mm	$\frac{c}{l} = \frac{3,8}{6}$.

A près d'un siècle d'intervalle, dans une série de mémoires fondamentaux sur la faune du Paléozoïque supérieur de la Belgique, M. F. DEMANET a décrit et figuré les *Lingula* des étages namurien et westphalien et a répertorié leurs gisements connus (6) (7) (8) (9).

Voici, extraites de ces ouvrages, les valeurs qu'il a données de grandeurs caractérisant des Lingules de ces étages, rencontrées en Belgique :

	l	c	$\frac{c}{l}$
L. squamiformis PHILLIPS	18 mm	12 mm	$\frac{4}{6}$.
L. mytilloides SOWERBY	—	—	$\frac{4}{6}$.
L. elongata DEMANET	~ 10 mm	3,2 mm	$\frac{2}{6}$.
L. pringlei MUIR-WOOD	1,2 mm	1 mm	$\frac{5}{6}$.

Ces renseignements, assez peu nombreux et relatifs à quelques individus en nombre indéterminé, nous paraissent insuffisants pour caractériser la taille des Lingules de nos formations houillères.

A l'étranger, d'autres chercheurs, ayant étudié des matériaux de leurs bassins houillers, ont mentionné les grandeurs de taille et les rapports dimensionnels suivants :

— J. E. PORTLOCK, en 1843 (10), a noté que le rapport de la plus grande longueur à la plus grande largeur des valves de *L. squamiformis* PHILLIPS varie considérablement, de $\frac{6}{2}$ à $\frac{4}{2}$ ou même plus. Dans notre notation, ces rapports

(5) Le rapport de la plus grande largeur (c) à la plus grande longueur (l), ou son inverse, est le plus employé.

(6) DEMANET, F., 1934, pp. 13-18.

(7) ID., 1938, pp. 53-54.

(8) ID., 1941, pp. 62, 210-211.

(9) ID., 1943, pp. 62-64.

(10) PORTLOCK, J. E., 1843, pp. 443-444.

deviennent $\frac{c}{l} = \frac{2}{6}$ à $\frac{3}{6}$. Au sujet d'un grand spécimen de *L. parallela* PHILLIPS, cet auteur cite les dimensions suivantes : $l = 9{,}25$ mm, $c = 5$ mm, soit $\frac{c}{l} = \frac{3{,}3}{6}$.

— F. R. MAC'COY, en 1844 [11], a relevé pour :

L. parallela PHILLIPS un rapport $\frac{c}{l} = \frac{3}{6}$;

L. squamiformis PHILLIPS un rapport de « largeur un peu plus grande que la moitié de la longueur ».

— Th. DAVIDSON, en 1858 [12], dans son monumental travail sur les Brachiopodes du Carbonifère de Grande-Bretagne, n'avait retenu pour ces terrains que les espèces suivantes, pour lesquelles il cite au hasard les tailles suivantes :

	l	c	$\frac{c}{l}$	
L. squamiformis PHILLIPS	41,8 mm	28,6 mm	$\frac{4}{6}$.	
	19,8 mm	14,3 mm	$\frac{4{,}2}{6}$.	
L. mytilloides SOWERBY	22 mm	5,5 mm	$\frac{3{,}4}{6}$.	
	15,4 mm	3,5 mm	$\frac{3}{6}$.	
	12,1 mm	1,5 mm	$\frac{4}{6}$.	
L. credneri GEINITZ	6,6 mm	5,5 mm	$\frac{5}{6}$.	
L. scotica DAVIDSON	33 mm	27,5 mm	$\frac{5}{6}$.	
	13,6 mm	11 mm	$\frac{5}{6}$.	
	48,4 mm	37,4 mm	$\frac{4{,}6}{6}$.	(13)

— H. WEHRLI, en 1924 [14], a publié les résultats d'une étude de 113 valves ventrales (?) de *L. mytilloides* SOWERBY. Il signale une grande variabilité des

(11) MAC'COY, F. R., 1844, p. 86.
(12) DAVIDSON, Th., 1858, pp. 205-210.
(13) DAVIDSON, Th., 1880, pp. 265-267.
(14) WEHRLI, H., 1931, pp. 96-97.

rapports largeur-longueur, qui s'étendraient des valeurs de $\frac{2,4}{6}$ à $\frac{4,2}{6}$, avec l variant de 9 à 1 mm. D'après cet auteur, cette variabilité du rapport $\frac{c}{l}$ correspond à un accroissement avec l'âge du plus grand diamètre, non proportionnel à l'élargissement de la valve. Au surplus, le contour des valves, très variable, donnerait des variétés spécifiques.

— E. D. CURRIE, C. DUNCAN et H. M. MUIR-WOOD ([15]) ont décrit une espèce nouvelle de *Lingula* du terrain houiller qu'ils ont dénommée *L. pringlei*. Voici, d'après eux, les mesures des types :

l	c	$\frac{c}{l}$
2,2 mm	1,7 mm	$\frac{4,6}{6}$.
2,2 mm	1,8 mm	$\frac{5}{6}$.
1,8 mm	1,5 mm	$\frac{5}{6}$.

— L. DORSMAN, en 1945 ([16]), dans une étude sur la faune marine du Carbonifère des Pays-Bas, a signalé pour :

L. mytilloides SOWERBY, un rapport $\frac{c}{l} = \frac{4}{6}$.

L. credneri GEINITZ ... ... $= \frac{4}{6}$.

L. cf. *parallela* PHILLIPS ... ... $= \frac{3}{6}$.

Pour la seule espèce *L. mytilloides* SOWERBY, forme la plus répandue au Carbonifère, on arrive ainsi à aligner, dans l'ordre des auteurs cités, des valeurs suivantes du rapport $\frac{c}{l}$:

$$\frac{3,4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3,3}{6}, \frac{3,3}{6}, \frac{4,8}{6} \text{ à } \frac{2,4}{6}, \frac{3,4}{6}.$$

Les écarts de grandeur de ces valeurs sont appréciables et, fait important, ils chevauchent les valeurs du même rapport établi pour d'autres espèces contemporaines.

([15]) CURRIE, E. D., DUNCAN, E. and MUIR-WOOD, H. M., 1937, p. 420.
([16]) DORSMAN, L., 1945, pp. 16-19.

§ 3. SPÉCIFICITÉ DE *LINGULA MYTILLOIDES* Sowerby.

I. — Diagnoses anciennes. — Comme souvent en paléontologie, la confrontation des diagnoses de *Lingula mytilloides* établies anciennement par les auteurs est peu profitable par la brièveté ou l'imprécision des caractères décrits. Les reproductions iconographiques utilisées par ces chercheurs sont de valeurs fort différentes et ne permettent pas de comparaisons fructueuses, d'autant plus que l'illustration de leur description porte, dans la plupart des cas, sur un nombre très limité de spécimens, notoirement insuffisant.

Après avoir fait un examen approfondi des textes et de l'iconographie, nous avons limité l'exposé de ce collationnement à la mise en évidence de quelques observations faites par les premiers descripteurs. Elles montrent, à suffisance, la faiblesse de leur connaissance de l'espèce étudiée ici et le danger de considérer ces travaux comme sanctionnant sans appel les types de l'espèce.

J. de Sowerby [17], auteur définissant le premier l'espèce, énumère comme suit ces caractères : « Ovate, anterior end slightly truncated, beak indistinct, nearly an inch long, and three-fifths wide... », puis ajoute : « I am told they are sometime larger than the figure ». Cette dimension de la taille nous apparaît comme tout à fait exceptionnelle et semble n'avoir plus jamais été signalée dans les faunes westphaliennes. Cet énoncé apporte la suspicion sur la valeur réelle du type. De plus, le spécimen représenté à la figure 2 de la planche 19 montre un ornement de position centrale, ce qui rapproche l'individu du genre *Orbiculoidea*, plus proche aussi par la taille.

J. E. Portlock [18], reprenant la description de J. de Sowerby, a figuré un spécimen (fig. 7, p. 32), lequel, d'après son texte, « appears to differs from Sowerby's in the usual proportional variations of young and old shell ». Nous savons seulement aujourd'hui que les petites formes ($l > 0{,}4$ mm) observées par l'un de nous ne sont pas homologues des adultes et que la taille de l'individu que J. E. Portlock considérait comme celle d'un jeune individu est en réalité celle d'un adulte pour les faunes du Westphalien.

L. De Koninck [19], dans sa diagnose de l'espèce, énonce : « L. testa ovata, regulariter convesca, etc. ». Or le dessin du spécimen qu'il offre aux figures 9 *a* et 9 *b* de la planche 6 de son travail présente un spécimen, de profil typique comme les nôtres, lequel n'est nullement de convexité régulière.

Th. Davidson [20], le premier chercheur qui ait développé l'étude des Lingules du Carbonifère à la lumière des formes actuelles, signale dans son énumération des caractères spécifiques : « Shell very variable in shape, but usually

---

[17] Sowerby, J. de, 1813, p. 55.
[18] Portlock, J. E., 1843, p. 444.
[19] De Koninck, L., 1842-1843, p. 310.
[20] Davidson, Th., 1858-1863, p. 207.

more or less regularly elliptical or ovate... Its sides are also some time nearly parallel and rounded in front ». Ce faisant il introduisit dans la description du contour des valves — élément majeur de la diagnose — la croyance en l'existence d'une large variabilité. Son application fut la source de nombreuses erreurs ultérieures dans la détermination spécifique. Nous pouvons considérer nos observations comme conformes à sa description quant aux autres points, les mesures dimensionnelles mises à part.

D'après lui, *Lingula parallela* et *Lingula elliptica* ne présenteraient que de légères variations de contour par rapport à *Lingula mytilloides*.

§ 4. PROVENANCE DU MATÉRIEL ÉTUDIÉ ET POSITION STRATIGRAPHIQUE DES GISEMENTS.

Le choix du matériel étudié a été dicté, d'une part, par la nécessité de faire porter l'examen des *Lingula mytilloides* sur des valves de toutes tailles, d'autre part, par l'intérêt de récoltes faites à grand intervalle tant géographique que géologique dans l'étendue du bassin houiller belge [21]. Les gisements explorés, qui appartiennent tous aux terrains d'âge westphalien, sont localisés et définis géologiquement comme suit :

1. Charbonnages de Wérister, siège de Homvent, à Beyne. Étage de 587 m, bouveau Sud, à 212 m de l'origine. Toit de Veine LAIRESSE, niveau n° 122. Ce gisement, qui est l'équivalent stratigraphique de l'horizon marin de Sainte-Barbe de Floriffoux à *Gastrioceras listeri*, se place, stratigraphiquement, à la base de la zone de Beyne (*Wn1b*) (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 48) [22].

2. Charbonnages de Ressaix, Leval, Péronnes, Sainte-Aldegonde et Genk, siège de Sainte-Aldegonde, à Mont-Sainte-Aldegonde. Puits n° 4. Étage de 670 m, bouveau Nord. Toit du deuxième veiniat sous la Veine SAINTE-MARGUERITE (= Veine NAYE-À-BOIS) (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 142, 162).

3. Charbonnages de Hensies-Pommerœul. *a*) Siège Louis Lambert, à Hensies. Étage de 840 m, bouveau Nord, à 534 m de l'origine. Toit de la 21e Veine de GHLIN. *b*) Siège des Sartys, à Hensies. Étage de 601,80 m, bouveau Sud, à 500 m de l'origine. Toit de la 21e Veine de GHLIN (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 145, 146).

4. Charbonnages de Bernissart, siège de Harchies, à Harchies. Étage de 480 m, bouveau Sud, à 820 m de l'origine. Toit de la 21e Veine de GHLIN (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 138).

---

[21] Voir à ce sujet DEMANET, F., 1943, Mémoire n° 101.
[22] Voir CHAUDOIR, H., ANCION, CH., PASTIELS, A., WILLIÈRE, Y., 1951.

5. Charbonnages du Levant et des Produits du Flénu, siège nos 27/28, à Jemappes. Étage de 705 m, bouveau Nord, à 800 m de l'origine. Toit de la 21e Veine de Ghlin (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 141).

6. Charbonnages du Bois-du-Luc, siège Le Quesnoy, à Trivières. Étage de 440 m, bouveau Nord, à 567 m de l'axe du puits. Toit d'un limet de charbon (Coll. Assoc. Étude Paléont. Stratigr. Houillères, I.G. : 137).

Ces gisements numérotés 2, 3, 4, 5, 6, qui appartiennent au niveau marin de Quaregnon à *Lingula* et *Productus* (*Pustula*) *piscariæ*, se placent stratigraphiquement à la base de la zone d'Asch (*Wn2a*).

Ont été spécialement utilisés pour les mensurations, les matériaux du niveau de Quaregnon, prélevés à Ressaix, qui présentent une grande abondance de petites formes; ceux du niveau de Lairesse, prélevés à Wérister, qui présentent une majorité d'individus de taille moyenne.

Les mensurations, effectuées suivant les méthodes indiquées au chapitre III, ont porté sur un nombre d'individus égal à 211 pour L.-Wérister, 320 pour L.-Ressaix.

CHAPITRE II

Méthodes statistiques d'interprétation des mesures des caractères morphologiques.

INTRODUCTION.

Dans une étude précédente portant sur un Lamellibranche dulcicole ([23]), il a été fait usage de certaines méthodes statistiques élémentaires afin de résoudre les problèmes de comparaison conchyliologiques qui se posaient aux auteurs.

Il fut fait appel, notamment, aux notions fondamentales de variable aléatoire ou variable statistique, de distribution de fréquence, de moyenne, de dispersion et de corrélation qui se révélaient suffisantes dans ce cas, vu l'homogénéité des collections d'individus étudiés et l'invariabilité de la forme des coquilles au cours de la croissance, dans les limites de l'observation portant sur des classes de formes adultes.

Les coquilles de Lamellibranches examinées possédaient, en effet, cette propriété remarquable de présenter un rebord libre plan dont la courbe demeurait semblable à elle-même au cours de la croissance aux stades examinés, à l'état adulte. Ce fait fut bien mis en évidence par l'étude de la corrélation entre certaines longueurs mesurées sur les pièces, faisant apparaître clairement l'existence de relations linéaires entre ces grandeurs, ainsi que par l'étude des distributions de fréquences d'indices caractéristiques (rapports de grandeurs), faisant apparaître une concentration bien nette de ces indices autour de valeurs centrales, ce qui a permis de leur conférer une valeur spécifique.

En outre, étant donné que les échantillons comptaient un nombre assez élevé d'individus, les comparaisons prenaient une forme fort simple. Les mesures effectuées permettaient, pour chacune des populations étudiées, de définir des estimations des valeurs des indices considérés comme spécifiques — estimations conférant la plus grande probabilité à ce qui avait été observé — et des intervalles de sécurité ou de quasi-certitude centrés sur ces valeurs. La comparaison des positions de ces intervalles permettait de conclure à l'absence de divergences sérieuses entre les échantillons étudiés. Les définitions des notions fondamen-

([23]) DELEERS, C. et PASTIELS, A., 1947.

tales citées ci-dessus et utilisées dans la présente recherche n'ont pas été reprises ici; le lecteur voudra bien consulter à ce sujet l'ouvrage mentionné.

Le matériel paléontologique étudié dans ce travail-ci a exigé l'emploi de méthodes statistiques plus précises, à la fois parce qu'il est moins nombreux et parce qu'apparaît ici une variabilité sensible de la forme des valves de Lingules au cours de leur croissance, les plus petites formes mesurées appartenant au stade post-embryonnaire, népionique ou néalogique (Hyatt). De plus les valves constituant les échantillons examinés présentent, à des degrés divers, des déformations dues à l'écrasement. Leurs profils en montrent tous les stades depuis l'écrasement quasi complet jusqu'à la forme en « ronde bosse » apparemment exempte de déformation.

Il est clair que les mesures de grandeurs linéaires homologues sur des pièces fortement déformées et sur des pièces intactes ne peuvent être utilisées telles quelles, pour caractériser une population (par une forme type non déformée), que s'il est bien établi que la déformation reste sans effet sensible sur les estimations obtenues des constantes auxquelles il est légitimement permis de conférer une valeur spécifique. S'il n'en est pas ainsi, on est conduit, soit à éliminer les pièces déformées, soit à déterminer des corrections dont il faut affecter les mesures effectuées sur de telles pièces, pour obtenir des mesures améliorées telles qu'elles auraient pu provenir des pièces intactes.

La variabilité de la forme au cours de la croissance peut trouver une excellente représentation mathématique dans ce que G. Teissier [24] a appelé *les lois de croissance relative*. Les paramètres qui apparaissent dans l'expression analytique de ces lois ont, selon cet auteur, un caractère spécifique. Il convenait donc de vérifier la validité de la représentation de la croissance dans les cas examinés ici au moyen de telles lois et de définir des estimations des paramètres. Si la vérification était concluante, il semblait permis de considérer, avec de sérieuses présomptions, que les paramètres obtenus ont une réelle valeur spécifique.

Finalement, les comparaisons entre les populations de gisements différents ont porté sur les lois de croissance dont les échantillons étudiés ont fourni une approximation aussi bonne que possible, et, plus précisément, sur les estimations des paramètres qui figurent dans ces lois. On a cherché à déterminer si les écarts observés d'un échantillon à l'autre pouvaient être considérés comme purement fortuits — auquel cas il eût été conclu à l'identité entre les populations dont sont extraits les échantillons — ou bien, au contraire, si les écarts étaient significatifs d'une différence réelle entre les populations.

En résumé, chacun des problèmes qui se posaient dans cette étude revenait à vérifier l'exactitude ou, au moins, l'acceptabilité d'une hypothèse : hypothèse de l'absence d'influence significative de la déformation mécanique

---

(24) Teissier, G., 1937, p. 23.

des valves sur les résultats des estimations à caractère spécifique, hypothèse de la validité de lois de croissance relative, hypothèse de l'identité des populations dont sont extraits les échantillons examinés, etc.

La vérification du bien-fondé d'une hypothèse est le souci constant de la recherche scientifique basée sur l'expérimentation. A cette fin, la statistique mathématique a permis de mettre au point de remarquables méthodes d'investigation scientifique, connues sous la dénomination générique de *tests de signification* ou *tests d'hypothèses statistiques*. Ces méthodes ne sont pas seulement de simples et fructueux procédés. Elles sont issues de quelques principes généraux de pure logique, définissant clairement la voie du raisonnement objectif dans le problème de l'inférence à partir de l'observation.

Les paragraphes qui suivent contiennent un exposé des principes généraux des tests de signification et des quelques tests particuliers dont il a été fait usage dans la présente étude.

§ 1. TESTS DE SIGNIFICATION.

a) Notions générales.

Ce qu'il est convenu d'appeler, en statistique, un test de signification est une règle qui conduit à l'acceptation ou au rejet d'une hypothèse en fonction du résultat de la comparaison, menée par des voies convenables, de ce qui a été observé à ce qui peut être observé de façon quasi certaine si l'hypothèse est exacte.

Une telle règle s'applique exclusivement à des hypothèses qui déterminent complètement ou partiellement la fonction de distribution des échantillons ou ensembles de valeurs (d'où la dénomination souvent employée de tests d'hypothèses statistiques).

En général, il est possible de définir une mesure δ de l'écart entre la distribution observée et la distribution hypothétique. Désignant l'hypothèse par H et la probabilité d'un événement quelconque A dans l'hypothèse H par P(A/H), on peut déterminer une valeur δ_0 de δ telle que

$$P(\delta > \delta_0 \mid H) = \alpha, \qquad (1)$$

où α est un nombre quelconque compris entre 0 et 1.

Si α est petit, par exemple 0,01 ou 0,05, la signification de l'égalité (1) est la suivante : dans l'hypothèse H la probabilité d'observer un échantillon donnant lieu à une valeur de δ supérieure à δ_0 est égale à 0,01 ou 0,05 ou, autrement dit, si l'hypothèse H est vraie, on ne doit s'attendre à obtenir des valeurs de δ correspondant aux observations et supérieures à δ_0 que 1 ou 5 fois sur 100, en moyenne.

Si l'on observe un échantillon donnant lieu à une valeur de δ aussi peu probable dans l'hypothèse H, on a d'excellentes raisons pour considérer cette hypothèse comme inexacte.

Par contre, si la valeur de δ correspondant à l'échantillon observé est inférieure à δ_0, c'est-à-dire est située dans la région des valeurs les plus probables,

dans l'hypothèse H, on n'a aucune raison de rejeter cette hypothèse; l'écart δ est compris dans des limites compatibles avec l'hypothèse.

Dès lors la *règle de rejet ou d'acceptation* de H s'énonce :

1° si $\delta > \delta_0$, l'hypothèse H est rejetée;

2° si $\delta < \delta_0$, l'hypothèse H est acceptée.

La valeur δ_0 est appelée *seuil de signification* (correspondant à α) en ce sens qu'un écart supérieur à δ_0 est *significatif* d'une divergence entre l'observation et l'hypothèse.

Cette règle n'exclut pas toute erreur, étant donné le caractère aléatoire de la composition d'un échantillon d'un nombre fini de valeurs observées sur un nombre fini d'individus pris au hasard sur une population globale le plus souvent très nombreuse, souvent même pratiquement impossible à dénombrer.

Il n'est pas exclu que l'hypothèse H étant exacte, l'échantillon examiné conduise à une valeur de δ située dans la *région critique* définie par $\delta > \delta_0$, ce qui entraîne le rejet de H. Quand bien même la probabilité α de cet événement est très petite, on ne peut dire que son arrivée soit impossible : *il y a une probabilité α de commettre l'erreur de rejeter* H *alors que* H *est vraie.*

Le choix de α étant arbitraire, on songe naturellement, tout d'abord, pour minimiser ce risque d'erreur, à choisir α extrêmement petit. En fait, cependant, si l'on prend $\alpha = 0{,}01$, les considérations qui sont à la base de la règle d'acceptation ou de rejet de l'hypothèse montrent qu'il est permis de juger bien suffisante la précision du test. Par ailleurs, réduire α présente, de façon très générale, l'inconvénient d'augmenter le risque de commettre une erreur d'une seconde espèce : *accepter l'hypothèse* H *alors qu'elle est fausse.* La théorie générale des tests de signification traite, entre autres, de l'important problème de la réduction de ce risque au minimum, pour une valeur donnée de α ([25]) ([26]).

Dans les applications numériques des tests de signification, qui feront l'objet du chapitre suivant, on considérera simultanément les seuils de signification correspondant à $\alpha = 0{,}01$ et $\alpha = 0{,}05$. Toute valeur de l'écart δ supérieure à δ_0 (0,01) sera jugée comme hautement significative d'une divergence entre l'observation et l'hypothèse; toute valeur de δ inférieure à δ_0 (0,05) conduira à l'acceptation de l'hypothèse; toute valeur de δ comprise entre δ_0 (0,01) et δ_0 (0,05) donnera lieu à une conclusion de rejet de l'hypothèse, mais si un autre test est éventuellement applicable, il conviendra de s'en servir afin d'obtenir une confirmation ou une infirmation significative de la conclusion adoptée.

b) **Test de la moyenne d'une population normale.**

Soit une variable aléatoire x dont le taux de probabilité (ou fonction de

---

([25]) CRAMER, H., 1946, pp. 525-536.

([26]) KENDALL, M. G., 1946, pp. 269-326.

distribution) soit une loi de GAUSS ou loi normale, de moyenne μ et de dispersion σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2)$$

L'ensemble des valeurs de x (de $-\infty$ à $+\infty$) constitue une population normale, parfaitement déterminée par la connaissance de μ et σ.

Si μ et σ sont inconnues à priori, c'est-à-dire si l'on sait uniquement que x obéit à une loi normale dont les paramètres μ et σ ne sont pas définis, mais si l'on possède un échantillon de n valeurs observées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x, stochastiquement indépendantes, il est possible de procéder au test d'une hypothèse fixant la valeur μ de la moyenne. Étant donnée une valeur particulière μ, ce test répond à la question suivante : *Peut-on considérer l'échantillon* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *comme provenant d'une population normale dont la moyenne est* μ*?*

Le test est basé sur l'emploi d'une variable aléatoire représentée habituellement par la lettre t et définie dans le cas présent par

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n}, \qquad (3)$$

où $\bar{x}$ et s sont la *moyenne* et la *dispersion* de l'échantillon, définies par

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x; \qquad (4)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right], \qquad (5)$$

$\bar{x}$ et s, variant avec l'échantillon, sont aussi des variables aléatoires. La variable t (variable de « STUDENT ») ([27]) ([28]) obéit à une fonction de distribution qui s'écrit sous la forme générale

$$f(t) = \mathrm{K}(\nu)\frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \qquad (6)$$

K étant une constante dépendant du nombre ν qui, ici, est égal à $n-1$. La fonction $f(t)$ est symétrique par rapport à $t = 0$ et la courbe correspondante affecte la forme « en cloche » rappelant la loi de GAUSS. D'ailleurs, lorsque ν croît indéfiniment, $f(t)$ tend vers une loi normale. La mesure δ de la distance entre l'observation et l'hypothèse est la valeur absolue de t :

$$\delta = |t| = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s}\sqrt{n}.$$

([27]) CRAMER, H., 1946, pp. 237-241, 455-456.
([28]) LINDER, A., 1945, pp. 92-94, 108-113.

On peut calculer la valeur positive $\delta_0 = t_0$ telle que

$$P(\delta > \delta_0 \mid H \mid = 1 - \int_{-t_0}^{+t_0} f(t)\,dt = \alpha.$$

Des tables, calculées pour les valeurs entières de ν et pour certaines valeurs de α, notamment $\alpha = 0{,}01$ et $\alpha = 0{,}05$, fournissent la valeur correspondante de t_0.

Dès lors, calculant

$$t = \frac{x - \mu}{s}\sqrt{n}$$

pour la valeur supposée de μ et les valeurs de $\bar{x}$ et s résultant de l'échantillon observé $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1° on acceptera l'hypothèse si

$$-t_0(0{,}05) < t < t_0(0{,}05)$$

ou bien si

$$\mu - t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + t_0 \frac{s}{\sqrt{n}};$$

2° on rejettera l'hypothèse si t est extérieur à l'intervalle

$$[-t_0(0{,}01),\, t_0(0{,}01)],$$

écart hautement significatif.

c) **Test de la différence de deux moyennes.**

Soient x' et x'' deux variables aléatoires obéissant à des lois normales de même dispersion et de moyennes inconnues, μ' et μ'', et soit à vérifier l'hypothèse de l'identité des moyennes des deux populations.

Soient

$$(x'_1, x'_2 \cdots x'_{n_1}) \qquad \text{et} \qquad (x''_1, x''_2 \cdots x''_{n_2})$$

deux échantillons de n_1 et n_2 mesures stochastiquement indépendantes, extraits respectivement des deux populations normales des x' et des x''. Soient $\bar{x}'$ et $\bar{x}''$ les moyennes de ces deux échantillons, s' et s'' les dispersions de ces échantillons. Les moyennes sont également des variables aléatoires obéissant à des lois normales de moyennes μ' et μ''; la différence $\bar{x}' - \bar{x}''$ est également une variable aléatoire distribuée normalement autour d'une moyenne égale à $\mu' - \mu''$. Selon l'hypothèse à tester,

$$\mu' - \mu'' = 0.$$

On utilisera également ici une variable de « Student » définie en rempla-

çant dans (3), $\bar{x}$ par $\bar{x}' - \bar{x}''$, μ par 0, s par

$$\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\,s'^2 + (n_2 - 1)\,s''^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

n par

$$\frac{n_1\,n_2}{n_1 + n_2},$$

et en posant

$$\nu = n_1 + n_2 - 2.$$

On calculera donc, pour deux échantillons de n_1 et n_2 valeurs effectivement observées de x' et x'', respectivement, la valeur de

$$t = \frac{\bar{x}' - \bar{x}''}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\,s'^2 + (n_2 - 1)\,s_2''}{n_1 + n_2 - 2}}}\sqrt{\frac{n_1\,n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (7)$$

et l'on déterminera, par simple lecture dans la table, les valeurs de t_0 correspondant à $\alpha = 0{,}01$; $0{,}05$ et $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

L'acceptation ou le rejet sont fondés sur la règle énoncée en fin du § *b*.

Le présent test permet de vérifier si les deux échantillons peuvent être considérés comme extraits d'une seule population. On notera que l'acceptation de l'hypothèse provient d'une conclusion à caractère négatif : l'écart entre les moyennes $\bar{x}'$ et $\bar{x}''$, auquel t est directement proportionnel se trouvant entre les limites qui contiennent les valeurs les plus probables dans cette hypothèse, c'est-à-dire celles que l'on observera le plus fréquemment, on ne peut rejeter logiquement cette hypothèse.

Le test sera appliqué, à quelques indispensables modifications formelles près, aux comparaisons entre les populations étudiées, de Lingules provenant de gisements divers.

d) Test de la différence entre des mesures groupées par paires.

Soient n paires de mesures d'un même caractère effectuées sur n couples d'individus appartenant à deux populations dont on ignore, à priori, si elles sont identiques ou différentes. Chaque couple est constitué par deux individus qui, exception faite pour les facteurs qui peuvent éventuellement justifier une distinction nette, sont placés dans un ensemble de conditions identiques.

x et y représentant, en général, une paire de mesures, la variable

$$d = x - y$$

est, *dans l'hypothèse où il n'y a pas de différence entre les deux populations*, sauf les écarts uniquement dus au hasard de l'échantillonnage, une variable aléatoire qu'on peut considérer comme normale, *de moyenne nulle* : $\mu_d = 0$.

(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) représentant n paires de mesures constituant un échantillon, la distribution de la moyenne

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \Sigma d_i = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - y_i)$$

est, en tout cas, voisine d'une distribution normale et l'on peut utiliser la variable de STUDENT :

$$t = \frac{\bar{d}}{s} \sqrt{n}, \tag{8}$$

avec

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (d_i - \bar{d})^2$$

et

$$\nu = n - 1$$

pour tester l'hypothèse de la nullité de la moyenne de la population des d.

Ce test sera utilisé en vue de déceler éventuellement une influence significative des déformations mécaniques sur les mesures des grandeurs linéaires qui interviennent dans les estimations des constantes auxquelles M. G. TEISSIER accorde un caractère spécifique. En outre, un test analogue à celui décrit au § *c* sera utilisé conjointement afin de vérifier si l'on peut considérer comme concordantes les estimations des constantes précitées provenant respectivement d'échantillons composés de pièces non déformées et de pièces ayant subi un écrasement complet.

e) Test de la différence de deux dispersions.

Si

$$s'^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x'_i - \bar{x}')^2$$

et

$$s''^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (x''_i - \bar{x}'')^2$$

sont les dispersions de deux échantillons de n_1 et n_2 valeurs stochastiquement indépendantes d'une variable aléatoire x obéissant à une loi normale, le quotient

$$F = \frac{s'^2}{s''^2} \tag{9}$$

est une variable aléatoire dont la fonction de distribution est de la forme

$$f(F) = K(\nu_1, \nu_2) \frac{F^{\frac{\nu_1 - 2}{2}}}{(\nu_2 + \nu_1 F)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} \tag{10}$$

où

$$\nu_1 = n_1 - 1 ;$$
$$\nu_2 = n_2 - 1,$$

et où K est une constante, dépendant de ν_1 et ν_2. F est une variable essentiellement positive, définie dans le domaine $0 < F < \infty$.

Étant données deux populations normales de dispersions σ' et σ'' inconnues, l'utilisation de cette variable F comme mesure de l'écart δ permet de tester l'hypothèse de l'identité des deux dispersions ou, plus précisément, de vérifier si l'écart entre s'^2 et s''^2, dispersions d'échantillons prélevés respectivement sur chacune des deux populations, est compatible avec l'hypothèse $\sigma' = \sigma''$.

Si s'^2 est la plus grande dispersion d'échantillon, on conçoit intuitivement que l'hypothèse pourra être mise en doute lorsque le rapport F sera de l'ordre de plusieurs unités.

Des tables numériques fournissent les seuils de signification F_0 correspondant à des valeurs données de α, ν_1 et ν_2, définis par

$$P(\delta > \delta_0 \mid H) = \int_{F_0}^{\infty} f_{\nu_1 \nu_2}(F)\, dF = \alpha.$$

Si $F > F_0$ (0,01), l'hypothèse de l'identité des dispersions sera rejetée; on admettra que la population des x' a une dispersion très significativement plus grande que celle des x'.

Si $F < F_0$ (0,05), on admettra l'identité des dispersions, l'expérience conduisant à une valeur comprise parmi celles qu'on observera le plus fréquemment dans le cas où l'hypothèse est vraie.

Si F_0 (0,05) $< F < F_0$ (0,01), la première conclusion sera toujours acceptée, et, dans la mesure du possible, un autre test sera utilisé.

Ce test, appelé habituellement test en F de R. A. Fisher ([29]) ([30]) ([31]), convient à la vérification du bien-fondé de l'utilisation de lois de croissance relative de G. Teissier.

§ 2. LOIS DE CROISSANCE.

a) Généralités.

Les biologistes se sont attachés, depuis longtemps déjà, à rechercher des représentations mathématiques satisfaisantes du phénomène de la croissance des organismes vivants.

Nombre d'entre eux ont tenté de résoudre le problème d'une représentation quantitative de phénomènes de croissance globale en fonction du temps. Diverses interprétations chimiques et physiologiques de la croissance trouvèrent

---

([29]) Fisher, R. A., 1948, pp. 226-233.
([30]) Cramer, H., 1946, pp. 241-243.
([31]) Linder, A., 1946, pp. 95-97, 114.

leur expression dans des formes mathématiques assurément fort élégantes, mais reposant sur des hypothèses résistant malaisément à la critique [32].

Le principal défaut, commun à toutes les hypothèses à la base des diverses interprétations du phénomène, est leur insuffisance évidente à embrasser simultanément l'ensemble complexe des causes et des conditions de la croissance.

Certaines représentations mathématiques de la croissance globale sont cependant parfaitement vérifiées expérimentalement, mais il semble bien qu'il ne faille voir là que la concordance normale, dans un intervalle plus ou moins étendu, entre l'expérience et une formule d'ajustement très approchée quoique imparfaite et, en fin de compte, empirique.

Cette absence de conclusions de valeur scientifique incontestable conduisit certains chercheurs : G. Teissier et J. Huxley, notamment, à substituer au problème de la recherche de lois globales absolues de croissance, le problème de la recherche de lois de croissance relative, d'un organe par rapport à l'autre, d'une partie d'un animal par rapport au tout.

b) Croissance relative; relation d'allométrie.

Les résultats concordants de nombreuses recherches dirigées dans ce sens montrent le caractère fondamental de la relation suivante, valable pour des masses, des volumes, des longueurs d'organes quelconques :

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dt} = \gamma\,\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (11)$$

Dans cette relation, x et y désignent les masses, volumes ou dimensions de deux organes quelconques, ou deux dimensions remarquables d'un individu; t représente le temps.

Cette relation exprime qu'il existe un rapport constant, égal à γ, entre les taux d'accroissement par unité de mesure de x et y et par unité de temps, des grandeurs x et y.

En intégrant les deux membres de (11), on trouve

$$y = k\,x^{\gamma}. \qquad (12)$$

On utilise souvent cette relation pour obtenir une représentation de la croissance de la longueur d'un organe ou d'une partie bien définie du corps d'un animal, par rapport à la longueur totale du corps.

Si x représente la longueur totale, la croissance de y sera plus rapide que celle de x si $\gamma > 1$, moins rapide si $\gamma < 1$ et parallèle si $\gamma = 1$.

G. Teissier [33] a proposé d'appeler la relation (12), *relation d'allométrie*

---

[32] Teissier, G., 1937, pp. 3-22.
[33] Id., 1937, pp. 24-25.

simple, l'allométrie étant positive ou négative suivant que γ est plus grand ou plus petit que 1. Le cas particulier correspondant à $\gamma = 1$ est une *isométrie*.

La constante γ est la *constante de croissance* et k *l'indice origine*, ainsi appelé parce qu'il est égal à la longueur y de l'organe lorsque $x = 1$. G. Teissier attribue une valeur spécifique à ces constantes, en signalant toutefois que la description de la croissance des animaux supérieurs nécessite la juxtaposition de plusieurs lois d'allométrie successives. L'expérience montre, d'après cet auteur, l'existence de points critiques de la croissance, en lesquels se raccordent deux lois d'allométrie distinctes, et l'existence de discontinuités entre deux lois décrivant deux phases successives de la croissance.

c) **Signification géométrique des constantes d'une relation d'allométrie.**

La relation (12) s'écrit, quelle que soit la base du système de logarithmes, sous la forme suivante :

$$\log y = \gamma \log x + \log k, \tag{13}$$

soit, en posant

$$X = \log x;$$
$$Y = \log y$$

et

$$\omega = \log k,$$
$$Y = \gamma X + \omega. \tag{14}$$

Cette relation linéaire entre les logarithmes des longueurs x et y suggère le recours à une représentation graphique utilisant les *coordonnées logarithmiques*. Dans un tel système de coordonnées, les longueurs portées sur les axes Ox, Oy sont proportionnelles aux logarithmes des nombres x et y. La lecture de x et y étant directe, il est inutile d'en calculer les logarithmes pour porter sur le graphique un point défini par x et y.

Dans le système d'axes Ox, Oy, une relation exponentielle telle que la relation d'allométrie (12), écrite sous la forme logarithmique (13), est représentée par une droite dont la pente est égale à la constante de croissance γ et dont l'ordonnée à l'origine est ω ou $\log k$. La valeur de k se lit directement sur l'échelle logarithmique de l'axe des ordonnées (fig. 1).

d) **Valeur spécifique des constantes d'une relation d'allométrie.**

La relation d'allométrie (12) apparaît comme une loi moyenne de part et et d'autre de laquelle les écarts individuels ont un caractère aléatoire. Ce caractère apparaît en conclusion d'études statistiques portant sur des cas pour lesquels il a été possible de rassembler des mesures en nombre suffisant [34].

---

[34] Teissier, G., 1937, p. 25.

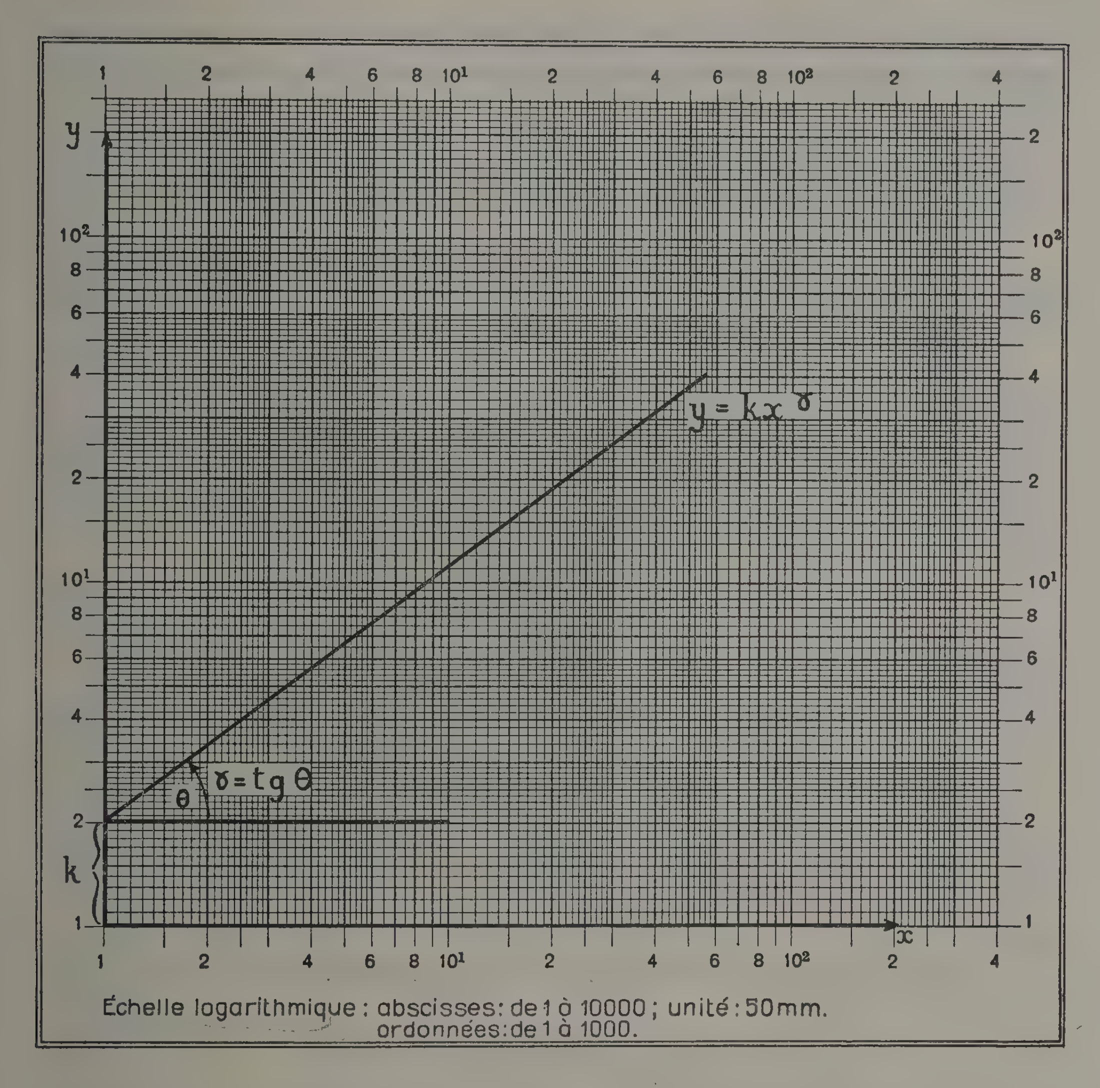


FIG. 1.

Cette constatation permet de croire à la spécificité des constantes γ et k; il s'ensuit que ces constantes peuvent jouer un rôle important dans la définition et la comparaison de populations. Les comparaisons auxquelles il est procédé au chapitre suivant sont, en premier lieu, fondées sur les considérations qui précèdent, relatives aux propriété d'une relation d'allométrie.

On remarquera utilement que si $\gamma = 1$, k n'est pas autre chose qu'un *indice* caractéristique tel qu'on en considère souvent dans les études biométriques. Dans ce cas particulier, l'indice caractéristique est une des valeurs déterminantes de

la spécificité. Ce cas est rencontré notamment dans les espèces animales dont les formes restent semblables à elles-mêmes au cours de la croissance, dans des phases très longues de celle-ci ([35]).

e) **Estimation des constantes d'une relation d'allométrie basée sur la théorie de la régression.**

La relation linéaire (14) et le caractère aléatoire des écarts entre l'observation et la relation d'allométrie suggèrent le recours à la théorie de la régression afin de calculer des estimations des coefficients γ et ω (ou k).

Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n valeurs observées de Y correspondant à n valeurs données $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X. Il est admis — et il sera procédé d'ailleurs à la vérification du bien-fondé de cette hypothèse en ce qui concerne les échantillons étudiés des populations de Lingules — que pour chaque valeur de X, les valeurs correspondantes de Y sont distribuées normalement, avec une dispersion indépendante de X, autour de la valeur

$$Y = \eta + \gamma (X - \overline{X}), \tag{15}$$

où $\overline{X}$ est la moyenne des $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

La droite définie par l'équation (15) est appelée *droite de régression* de Y en X. Dans cette équation, les vraies valeurs des coefficients η et γ ne sont exactement définies que si le nombre n de couples de valeurs (X_i, Y_i) croît indéfiniment. Comme n est nécessairement fini, il ne pourra être obtenu que des estimations de η et γ.

Si, pour chacune des valeurs X_i, le taux de probabilité de Y_i est, comme il vient d'être admis,

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[Y_i - \eta - \gamma (X_i - \overline{X})]^2}{2\sigma^2}},$$

les estimations de γ et η qui confèrent la plus grande probabilité à ce qui a été observé sont :

1° pour γ :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} ; \tag{16}$$

([35]) Deleers, C. et Pastiels, A., 1947.

2° pour η :

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \Sigma Y_i. \tag{17}$$

L'expression (16) peut être mise sous une forme beaucoup plus commode pour le calcul. On a, en effet,

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i + n \overline{X}\,\overline{Y}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n \overline{X}^2;$$

d'où

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n \overline{X}^2}. \tag{18}$$

Les estimations Y et a, dépendant des valeurs observées, sont des variables aléatoires. On démontre qu'elles sont stochastiquement indépendantes et distribuées suivant une loi normale, autour des moyennes respectives, égales aux vraies valeurs η et γ, avec les dispersions

$$\sigma_{\overline{Y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

et

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

Enfin, la quantité

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} [Y_i - Y(X_i)]^2, \tag{19}$$

où les Y_i sont les valeurs observées de Y, et les $Y(X_i)$, les valeurs calculées en remplaçant X par X_i dans l'équation

$$Y = Y + a(X - \overline{X}), \tag{20}$$

est une variable aléatoire dont la distribution montre que sa valeur moyenne [36] n'est autre que σ^2. La quantité s^2 sera choisie comme estimation de σ^2; s^2 est la *dispersion des valeurs d'un échantillon autour de la droite de régression de l'échantillon, d'équation* (20).

---

(36) Deleers, C. et Pastiels, A., 1947, p. 38.

On peut dire de cette dernière droite qu'elle est une estimation de la vraie droite de régression, en ce sens que son coefficient angulaire et son ordonnée à l'origine sont les estimations de γ et η.

f) Validité d'une relation d'allométrie. Test de signification de la linéarité d'une régression.

L'application des formules (17) et (18) aux n couples de valeurs observées (X_i, Y_i) conduit à un résultat et à des conclusions dont il est nécessaire de pouvoir juger la légitimité. Celle-ci est liée à la vérification du bien-fondé de l'hypothèse d'une répartition, suivant une loi normale, des points (X_i, Y_i) autour de la droite de régression. Dans certains cas, l'allure même de la représentation graphique du nuage de points (X_i, Y_i) suffit amplement à confirmer la signification des calculs ou, au contraire, à leur ôter tout sens.

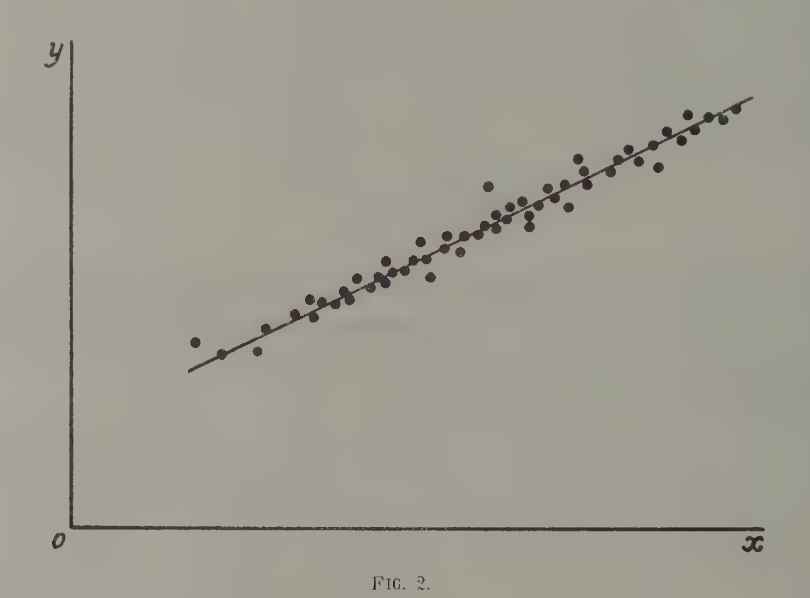


Fig. 2.

Il est, par exemple, parfaitement évident qu'une répartition des points telle que celle de la figure 2 correspond à une relation fonctionnelle linéaire entre X et Y. Par contre, il est tout aussi évident que la droite de régression qui résulterait de l'estimation des coefficients γ et η par les formules (16) et (17) n'a aucune signification pratique dans le cas d'une répartition telle que celle de la figure 3.

S'il existe, comme on peut le croire légitimement, une relation fonctionnelle, dans ce dernier cas, entre X et Y, elle n'est pas du type linéaire.

Entre ces deux cas nettement différenciés, on peut obtenir des répartitions plus diffuses des points (X_i, Y_i). Quand bien même le nuage de points accuse une certaine concentration autour d'une droite, il est difficile de se rendre compte visuellement de la qualité de l'approximation de la régression au moyen d'une droite.

A cet effet, il sera utile de s'en référer à la conclusion du test suivant, basé sur l'emploi de la variable F de R. A. Fisher. L'intervalle dans lequel sont situées toutes les valeurs de X est supposé divisé en p intervalles partiels d'égale longueur (fig. 4).

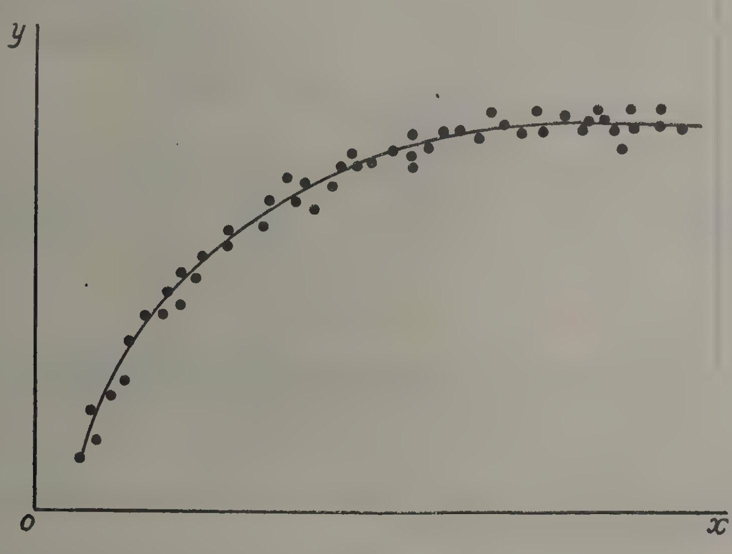


Fig. 3.

Les abscisses centrales de ces intervalles sont désignées par $X_1, X_2, \ldots, X_p$ $(p < n)$.

Soient :

n_j, le nombre de points compris entre les deux parallèles à l'axe Oy, menées par les extrémités du $j^{\text{ème}}$ intervalle partiel;

$\overline{Y}_j$, la moyenne des n_j valeurs correspondantes de Y :

$$\overline{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk},$$

Y_{jk} représentant une des n_j ordonnées observées dans le $j^{\text{ème}}$ intervalle;

$\overline{Y}$ la moyenne de toutes les valeurs de Y :

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j \overline{Y}_j$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk};$$

Y_j la valeur de Y calculée au moyen de

$$Y_j = \overline{Y} + a(X_j - \overline{X}).$$

Le groupement en p intervalles partiels de l'ensemble des n valeurs de X conduit à remplacer les n_j valeurs de X du $j^{\text{ème}}$ intervalle ($j = 1, 2, \ldots, p$) par

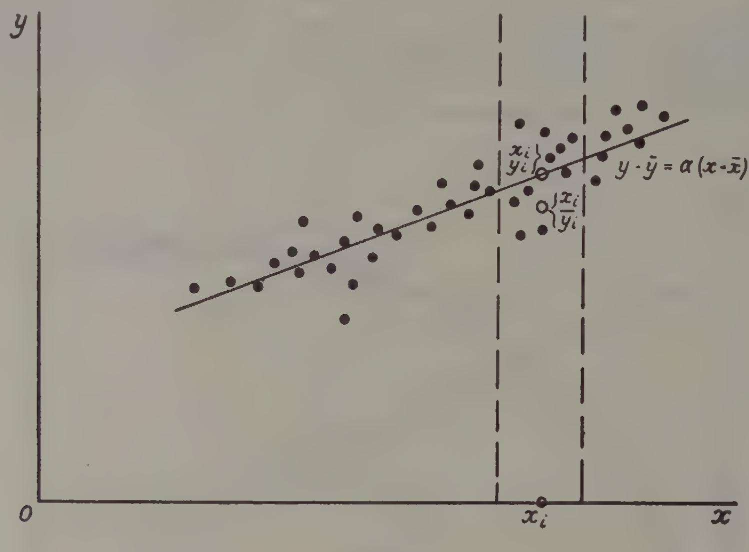


FIG. 4.

la valeur centrale X_j. Dans la dernière équation, a est la valeur obtenue au moyen de la formule (16) légèrement modifiée :

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_j}(X_j - \overline{X})(Y_{jk} - \overline{Y})}{\sum_{j=1}^{p} n_j (X_j - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{p} n_j (X_j - \overline{X})\,\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{p} n_j (X_j - \overline{X})^2}.$$

On démontre que, dans l'hypothèse à vérifier,

$$s_1^2 = \frac{1}{p-2}\sum_{j=1}^{p} n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 \qquad (21)$$

et

$$s_2^2 = \frac{1}{n-p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_j}(Y_{jk} - \overline{Y}_j)^2 \qquad (22)$$

sont deux estimations stochastiquement indépendantes de la dispersion σ^2 des valeurs de Y autour de la droite de régression.

Le rapport

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

dépendant de la constitution de l'échantillon est une variable aléatoire obéissant à la distribution (10) de R. A. FISHER, avec

$$\nu_1 = p - 2,$$
$$\nu_2 = n - p.$$

On recherchera dans les tables construites à cet effet les valeurs F_0 (0,01) et F_0 (0,05).

Si

$$F > F_0(0{,}01),$$

l'hypothèse de la distribution normale des valeurs de Y autour d'une droite de régression est à rejeter.

Si

$$F < F_0(0{,}05),$$

l'écart entre s_1^2 et s_2^2 est compris entre des limites telles qu'on ne puisse rejeter cette hypothèse; la distribution observée correspondant à ce que permet d'attendre l'hypothèse.

Si

$$F_0(0{,}05) < F < F_0(0{,}01),$$

l'hypothèse sera rejetée sous réserve d'application d'un autre test.

Dans le cas où le test conclut à l'acceptation de l'hypothèse, la validité de la relation d'allométrie est hautement vraisemblable et il s'ajoute de la sorte un argument en faveur de l'attribution d'une valeur spécifique aux constantes de la relation d'allométrie.

g) Comparaison de deux relations d'allométrie. Identité ou divergence entre deux populations.

Soient

$$Y = a' X + w', \qquad (23)$$
$$Y = a'' X + w'' \qquad (24)$$

les équations des droites de régression de deux échantillons de n_1 et n_2 couples de mesures (X'_i Y'_i), et (X''_j, Y''_j) avec $i = 1, 2, ..., n_1$ et $j = 1, 2, ..., n_2$, extraits respectivement de deux populations dont on ignore, à priori, si les distributions sont identiques ou différentes. Il est admis que la validité de l'hypothèse examinée au § *f* est vérifiée pour chacun des échantillons.

Afin d'obtenir une conclusion d'identité ou de divergence, il convient de procéder au test de l'hypothèse : *les deux échantillons proviennent d'une population unique.*

Dans cette hypothèse, les écarts entre a' et a'' et entre w' et w'' doivent rester entre certaines limites qu'il est possible de fixer en recourant à des variables t de STUDENT, convenablement définies.

Il a été signalé plus haut (*e*) que a et $\overline{Y}$ étaient distribuées normalement autour de γ et η.

Il s'ensuit que

$$w = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

est également une variable aléatoire normale, de moyenne égale à la vraie valeur $\omega = \eta - \gamma\overline{X}$ et de dispersion

$$\sigma_w^2 = \sigma_{\overline{Y}}^2 + \overline{X}^2 \sigma_a^2$$
$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \right].$$

S'il n'y a pas de différence entre les deux populations dont les échantillons ont fourni les droites d'équations (23) et (24), les moyennes de a' et a'' et celles de w' et w'' sont égales, de sorte que les moyennes de $a' - a''$ et $w' - w''$ sont nulles. L'adaptation du test de différence de deux moyennes aux différences $a' - a''$ et $w' - w''$ conduit à l'introduction de deux variables de STUDENT :

1°

$$t = \frac{a' - a''}{\sqrt{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i' - \overline{X}')^2} + \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n_2} (X_j'' - \overline{X}'')^2}}} \cdot \frac{\sqrt{n_1 + n_2 - 4}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} [Y_i' - Y'(X_i')]^2 + \sum_{j=1}^{n_2} [Y_j'' - Y''(X_j'')]^2}} \qquad (25)$$

avec $\nu = n_1 + n_2 - 4$:

2°

$$t = \frac{w' - w''}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{\overline{X}'^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i' - \overline{X}')^2} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{\overline{X}''^2}{\sum_j (X_j'' - \overline{X}'')^2}}} \cdot \frac{\sqrt{n_1 + n_2 - 4}}{\sqrt{\sum_i [Y_i' - Y'(X_i')]^2 + \sum_j [Y_j'' - Y''(X_j'')]^2}} \qquad (26)$$

avec $\nu = n_1 + n_2 - 4$.

En recherchant les seuils de signification t_0 (0,01) et t_0 (0,05) et en leur comparant les deux valeurs de t (25) et (26) provenant des échantillons, on pourra notamment conclure à l'identité des deux populations si les valeurs sont simultanément inférieures à t_0 (0,05). Dans tout autre cas, à l'exception du cas où l'une des valeurs serait comprise entre t_0 (0,05) et t_0 (0,01) et sous réserve de vérification par un autre test, l'hypothèse devra être rejetée.

Si de tels tests, appliqués simultanément pour divers couples de grandeurs linéaires (XY), (XZ), (XT), etc., conduisent uniformément à une conclusion d'acceptation de l'hypothèse, l'identité des populations laisse finalement une incertitude minime.

Dans l'application des méthodes statistiques, dont il vient d'être donné un bref aperçu, à la présente étude sur des valves de Lingules, il est fait usage, comme il sera exposé au § 1 du chapitre suivant, de plusieurs mesures par individu, ce qui entraînera la considération simultanée de plusieurs relations d'allométrie correspondant à divers couples de mesures. L'uniformité des conclusions obtenues au moyen de tests appropriés appliqués à ces couples de mesures constituera, comme le montre la remarque de l'alinéa précédent, une garantie des conclusions générales qu'il sera permis d'en inférer.

Les calculs essentiels sont consignés dans les tableaux hors texte nos I à VIII, de même que les conclusions de chacun des six tests utilisés.

CHAPITRE III

Mesures des caractères morphologiques. Application des méthodes statistiques.

§ 1. CARACTÈRES MORPHOLOGIQUES MESURÉS.

La symétrie bilatérale d'une valve de Lingule conduit naturellement au choix de deux grandeurs linéaires caractéristiques principales. La première est le *diamètre antéro-postérieur,* mesurant la corde de longueur maximum, défini par l'intersection des plans frontal et sagittal et communément appelé *longueur de la valve;* il constitue encore le diamètre de croissance maximum. La deuxième est le *diamètre margino-latéral,* perpendiculaire au premier, communément appelé largeur de la valve, défini par la propriété d'être, parmi toutes les cordes de la courbe du rebord libre, perpendiculaires à l'axe de symétrie, celle de longueur maximum. Cette dernière définition ne permet guère de situer géométriquement, en raison de l'inévitable imprécision d'appréciation, ce diamètre margino-latéral. Sa mesure est cependant un élément caractéristique qui a été retenu dans la présente étude.

La mesure de ces « longueur » et « largeur » est insuffisante pour définir morphologiquement une valve de Lingule non seulement en raison de l'imprécision de la définition géométrique de la seconde, mais surtout en raison de l'existence d'une infinité de courbes ovoïdes de mêmes *longueur* et *largeur,* au sens conféré ici à ces termes. Parmi les nombreuses espèces de Lingules connues, on note, en effet, une grande variété de formes de la courbe du rebord libre, telles que : subcirculaire, ovoïde, ellipsoïde, subrectangulaire, subtriangulaire. Il apparaît donc bien nécessaire de procéder à la mesure de plusieurs grandeurs linéaires ou angulaires accessoires pour une caractérisation valvaire plus précise.

Les grandeurs angulaires sont très généralement à éliminer, car il s'agit d'angles plus apparents que bien définis par des droites repérables, et leur choix ne peut, sauf dans le cas de grandeurs hautement caractéristiques de définition naturelle précise, se détacher d'un certain arbitraire. D'autre part une définition morphologique plus précise exige aussi des mesures de longueurs d'arc qui demandent l'emploi de méthodes topographiques complexes. Il n'en a pas été fait usage de façon systématique sur les échantillons des populations étudiées, bien que de pareilles mesures aient été effectuées et utilisées en vue de la caractérisation morphologique générale faisant l'objet du chapitre IV.

Dans le cas de *Lingula mytilloides*, où l'assimilation, en première approximation, de la courbe du bord libre avec l'ellipse parfaite est satisfaisante, il a été utilisé la mesure de *cordes transversales* perpendiculaires au diamètre antéro-postérieur. Des considérations, les unes d'ordre géométrique, les autres d'ordre biologique, ont permis de fixer un nombre de cordes qui, si l'on peut affirmer qu'il soit optimum, n'est pas exagérément surabondant.

Sur la figure 5, représentant une valve de Lingule schématisée, sont reportées les grandeurs mesurées et leurs notations établies comme suit :

l = longueur du diamètre antéro-postérieur ou diamètre de croissance maximum;

c = longueur du diamètre margino-latéral ou diamètre transversal maximum, mesuré sur une droite $\overline{DE}$ perpendiculaire à $\overline{AC}$;

$r = \frac{l}{6}$, distance entre deux cordes transversales consécutives;

c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 = cordes transversales mesurées aux hauteurs r, $2r$, $3r$, $4r$, $5r$, sur des droites perpendiculaires à $\overline{AC}$.

La mesure des grandeurs précitées fut réalisée au moyen de la méthode suivante : Les pièces furent photographiées sur film, dit de 35 mm, de format d'image 24 × 36 mm, au grandissement linéaire initial de 2 ou de 3 fois. Les images du film négatif, agrandies, à la projection, aux échelles de 30 ou de 40 fois, ont permis le dessin du contour des valves. La mesure sur ces dessins des grandeurs recherchées permit de limiter l'erreur technique de mesure des grandeurs linéaires initiales à ± 0,05 mm.

Notons que, de l'avis de M. F. DEMANET [37] et du nôtre, les différences de forme et de grandeur entre valves ventrales et valves dorsales sont peu perceptibles dans la plupart des cas. Rappelons que pour l'espèce actuelle *Lingula anatina*, la différence entre les longueurs des diamètres antéro-postérieurs est de l'ordre de cinq pour cent.

La forme de la courbe du rebord libre de *Lingula mytilloides* n'est pas sans présenter une analogie évidente avec des parties de courbe du quatrième degré, sections planes d'une surface bien connue, en forme d'anneau et appelée tore (circulaire ou elliptique). Il s'agit d'une surface de révolution engendrée par la rotation autour d'un axe situé dans un plan, d'une circonférence ou d'une ellipse. Il n'est pas permis d'affirmer que l'équation de la courbe du rebord libre *est* du quatrième degré à deux variables, mais on peut penser qu'une équation du type « section de tore » constitue un *modèle mathématique* convenable des courbes du rebord libre qui, par induction, pourrait orienter la recherche par voie d'analogie et, peut-être, expliquer des particularités morphologiques connues.

Toutefois, un tel choix serait, en définitive, purement arbitraire. Il n'est pas douteux qu'on puisse sans trop de peine trouver de nombreux autres modèles

---

(37) DEMANET, F., 1934, p. 13.

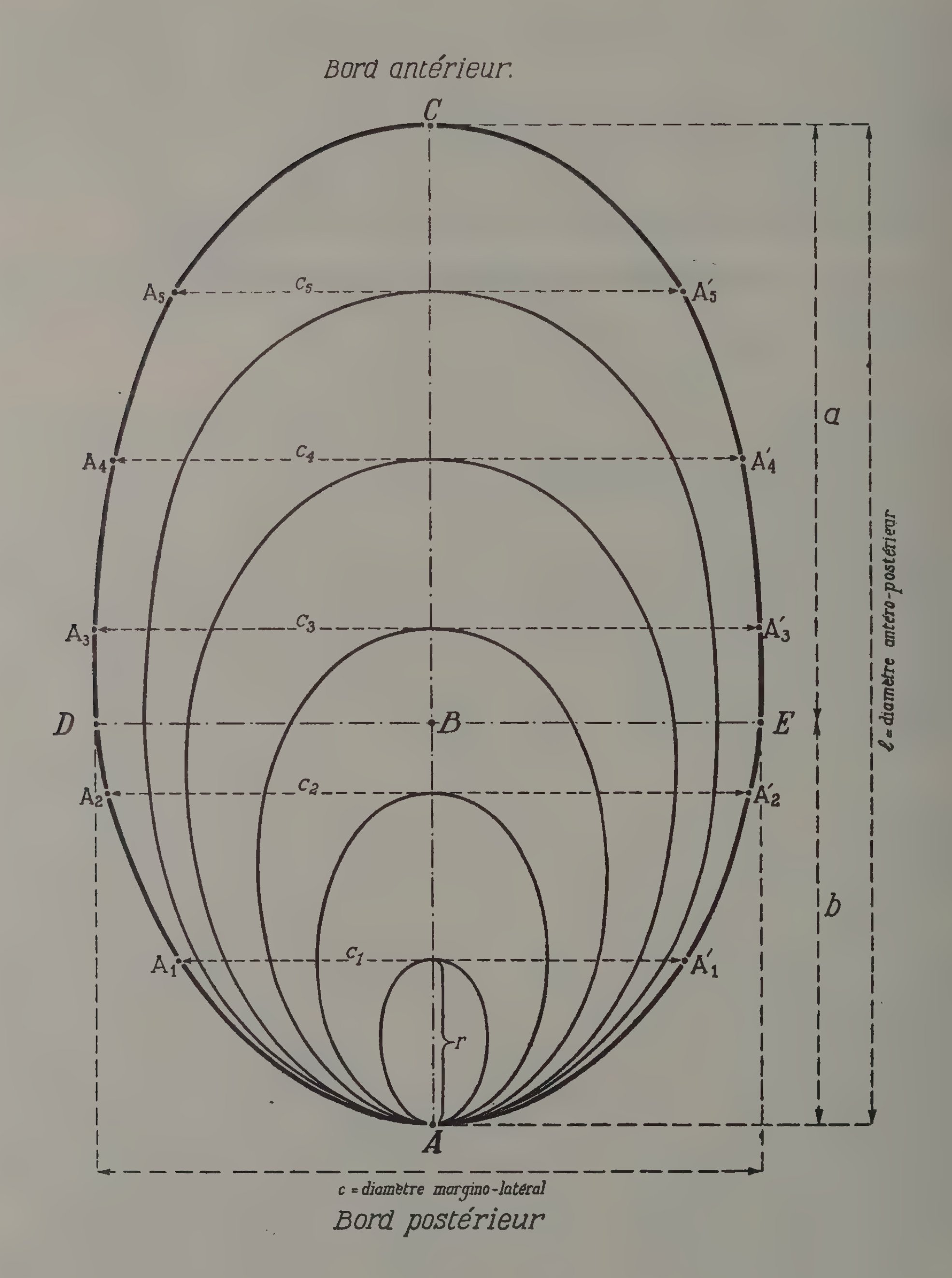

Bord antérieur.
C
A5
c5
A'5
a
A4
c4
A'4
ℓ = diamètre antéro-postérieur
A3
c3
A'3
D
B
E
A2
c2
A'2
b
A1
c1
A'1
r
A
c = diamètre margino-latéral
Bord postérieur

Fig. 5.

de courbes également satisfaisants. Dès lors, et c'est à quoi le mathématicien doit se résoudre en pratique, dans de tels cas, il faut se contenter d'une définition de la courbe par un certain nombre de points, en l'occurrence : les extrémités des cordes détaillées plus haut. Leurs mesures suffisent pour caractériser la forme du *rebord libre*, intersection du plan de séparation des valves (plan frontal) avec le bord de la valve. On trouvera la définition obtenue de ce rebord libre de *Lingula mytilloides* au chapitre suivant.

La caractérisation géométrique de la forme de la surface des valves, par des méthodes statistiques, implique un nombre élevé de mesure destinées à restituer la courbure de la surface. La difficulté matérielle de la réalisation de ces mesures n'a pas permis ici l'utilisation systématique de ces méthodes. Pour étendre à une surface une méthode de définition par points ou par un réseau de courbes la recouvrant, il convient de faire appel à des techniques précises de mesures d'altitude sur de petits objets, par exemple des méthodes d'application de la photogrammétrie.

§ 2. TEST DE SIGNIFICATION DE L'INFLUENCE DES DÉFORMATIONS.

Les valves constituant les échantillons prélevés sur les deux gisements étudiés présentent, à des degrés divers, des déformations dues à l'écrasement.

A priori, il n'était pas permis de mêler, à des fins de calculs de constantes statistiques diverses, des mesures effectuées sur des valves inégalement déformées à la suite d'actions mécaniques. Celles-ci peuvent avoir déterminé, sur les grandeurs mesurées, des effets tels que l'application de méthodes statistiques à l'ensemble des mesures serait ainsi complètement dépourvue de sens.

Il convenait donc de déterminer, dans ce cas, si l'influence des déformations sur les estimations des constantes auxquelles il est permis de conférer une valeur spécifique était réelle ou négligeable.

Autrement dit, il convenait de déterminer si deux échantillons de valves caractérisées par deux degrés de déformation bien distincts conduisaient à des différences significatives entre les distributions observées des mesures effectuées de grandeurs homologues et, par conséquent, entre les constantes qui caractérisent ces distributions.

A cet effet, il a été procédé comme suit :

L'examen du profil longitudinal d'une valve montre que, des deux diamètres et des cordes transversales, c'est la corde c_5 dont la longueur subit, à l'écrasement, la modification relativement la moins considérable.

Il a été prélevé, sur un échantillon de valves d'une même origine, deux sous-échantillons composés, l'un, de valves apparemment non déformées, l'autre, de valves ayant subi un écrasement quasi complet. Ces deux sous-échantillons comportent le même nombre n d'individus correspondant à une série de n valeurs

croissantes de la mesure de la corde c_5. Il est ainsi possible de constituer n paires au moyen d'une valve non déformée et d'une valve déformée ayant en commun la même valeur mesurée de c_5.

Désignant par

$$l', c', c'_1, c'_2, c'_3, c'_4; \qquad l'', c'', c''_1, c''_2, c''_3, c''_4$$

les mesures des diamètres et cordes effectuées respectivement sur des valves non déformées et sur des valves déformées, on a calculé pour chacune des n paires, les différences

$$\left.\begin{array}{l} \log l' - \log l''; \\ \log c' - \log c''; \\ \log c'_1 - \log c''_1; \\ \log c'_2 - \log c''_2; \\ \log c'_3 - \log c''_3; \\ \log c'_4 - \log c''_4. \end{array}\right\} \quad (27)$$

L'utilisation des logarithmes est dictée par la nature des relations d'allométrie (chap. II, § 2, *b*).

A chacune des différences ci-dessus peut s'appliquer le test de la différence entre des mesures groupées par paires (chap. II, § 1, *d*), test qui permet, soit de faire apparaître des différences significatives entre les mesures de grandeurs linéaires homologues sur des valves non déformées et déformées, soit, au contraire, de montrer que les différences observées ont un caractère purement aléatoire, n'excédant pas les valeurs extrêmes des différences susceptibles d'être observées entre individus d'une même population.

Par exemple, il a été constitué, pour le gisement de Wérister, deux échantillons comptant chacun 17 valves, non déformées pour le premier, déformées jusqu'à l'écrasement presque total pour le second, telles que 17 paires composées d'une valve non déformée et d'une valve déformée dont les mesures de c_5 sont égales, aient été formées.

Les différences (27) ont ensuite été calculées et, pour chacune des variables, la moyenne $\bar{d}$ et la dispersion s de l'échantillon ont été calculées, de même que la valeur de

$$t = \frac{\bar{d}}{s}\sqrt{n},$$

où

$$n = 17.$$

On a recherché dans la table des seuils de signification t_0 (0,05) et t_0 (0,01) les valeurs correspondant à

$$\nu = n - 1 = 16,$$

soit

$$t_0(0{,}05) = 2{,}120,$$
$$t_0(0{,}01) = 2{,}921.$$

On a trouvé que les valeurs de t correspondant à chacune des différences (27) observées sur les échantillons décrits ci-dessus sont inférieures, en valeur absolue, au plus petit des deux seuils de signification considérés : t_0 (0,05).

En conclusion, les différences observées ne sont pas significatives. Elles ne révèlent pas de divergence systématique entre les distributions des variables aléatoires considérées.

En d'autres termes, *les mesures effectuées sur des valves déformées peuvent être utilisées telles quelles, sans correction préalable, dans des calculs effectués en vue de caractérisations morphologiques, de comparaisons avec des valves non déformées ou d'identifications par la voie de méthodes statistiques.*

On note, par ailleurs, que les moyennes $\bar{d}$ du tableau hors texte n° 1 sont représentatives d'écarts dont l'ordre de grandeur est de 2 à 3 %, soit de l'ordre de l'erreur due uniquement à l'imprécision de la mesure. Une seule valeur ($\bar{d} = 0{,}03913266$) correspond à un écart de l'ordre de 9 %; on remarque que cette moyenne relativement élevée provient d'un écart individuel extrême (couple n° 16, corde transversale c_1, $d = 0{,}32221929$) très vraisemblablement imputable à une erreur de mesure, mais qu'on ne peut néanmoins exclure du calcul, sans quoi on introduit une sélection détruisant dans une large mesure le caractère aléatoire des échantillons.

En ce qui concerne le gisement de Ressaix, la petitesse des pièces examinées a rendu difficile une sélection optique qui aurait dû conduire à une appréciation raisonnable du degré de déformation des pièces et aurait permis la constitution d'échantillons appariés de valves analogues à ceux prélevés sur l'échantillon issu du gisement de Wérister.

Il est notamment apparu que la mesure des dénivellations sur ces pièces, en apparence fortement écrasées, a révélé fréquemment une distance maximum du profil du diamètre antéro-postérieur qui est de l'ordre du $1/20$ de la longueur de ce diamètre.

Un test analogue à celui qui vient d'être décrit ne peut avoir, dans ces conditions, une conclusion aussi précise. Cependant, les calculs effectués sur un échantillon provenant de ce second gisement n'ont révélé aucune différence significative.

§ 3. TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

Un examen optique sommaire de l'ornementation des valves (lignes d'accrétion) et une comparaison entre les contours de valves de dimensions diverses ont conduit à la présomption de l'existence de relations d'allométrie du type signalé par M. G. Tessier, entre deux quelconques des grandeurs linéaires considérées dans le présent chapitre. La nécessité d'un test de validité de l'hypothèse de cette existence s'imposait donc.

On notera que le mot « validité » est pris ici au sens que lui confère habituellement la statistique : la validité d'une hypothèse est statistiquement admis-

sible si les résultats des mesures ou de l'observation sont conformes à ce que permet théoriquement de prévoir, avec une quasi-certitude, l'hypothèse en cause. Il ne s'agit pas jusqu'à présent de la validité au sens biologique, c'est-à-dire de la valeur dans l'interprétation biologique.

L'utilisation des relations d'allométrie à des fins de comparaisons entre populations et de définition morphologique d'espèce nécessite la vérification préalable de la légitimité de cet emploi (chap. II, § *f*). En effet, l'obtention de la conclusion favorable d'un test préliminaire de la validité de la relation d'allométrie entre deux grandeurs mesurées sur des individus quelconques extraits d'une population est un premier pas nécessaire. Un résultat favorable justifie alors l'entreprise de calculs nécessairement longs, basés sur un matériel statistique important, qu'exige l'estimation précise des constantes biométriques.

Pour chacun des gisements étudiés (Wérister et Ressaix) il a été prélevé sur chacun des lots primitifs, comportant respectivement 211 et 320 valves, un échantillon de 50 valves prises au hasard. Il a été procédé à la vérification de la validité d'une relation d'allométrie entre, d'une part, chacune des grandeurs c, c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 et, d'autre part, la longueur l du diamètre antéro-postérieur. Cette vérification a été conduite conformément à la méthode décrite au chapitre II, § 2, *f*; la variable Y étant successivement le logarithme de c, diamètre margino-latéral, et des cordes transversales c_1, c_2, ..., c_5.

Les tableaux hors-texte n°s II à V contiennent tous les éléments du calcul des deux estimations de la dispersion (21) et (22) des valeurs de chacune des variables Y ($\log c$, $\log c_1$, $\log c_2$, $\log c_3$, $\log c_4$, $\log c_5$) autour des valeurs tirées des équations des droites de régression de ces variables Y en X ($\log l$).

Pour chaque couple de variables (X, Y), il a été procédé au calcul des deux estimations stochastiquement indépendantes de la dispersion, désignées précédemment par s_1^2 et s_2^2 (chap. II, § 2, f), et au calcul des valeurs de F correspondantes.

L'utilisation des tables de seuils de signification de F [38] implique que la plus grande des deux estimations de la dispersion soit le numérateur de la fraction F. Il a été tenu compte de cette particularité dans les calculs que l'on trouvera résumés dans les tableaux.

Les seuils de signification auxquels sont comparées les valeurs de F établies au moyen des données issues de l'observation sont donc soit

$$F_0(0{,}05) = 2{,}245,$$
$$F_0(0{,}01) = 3{,}11,$$
$$\text{pour } \nu_1 = p - 2 = 7,$$
$$\text{et } \nu_2 = n - p = 41:$$

---

[38] Hoel, P., 1948, pp. 250-253.

soit

$$F_0\ (0,05) = 3,338,$$
$$F_0\ (0,01) = 5,895,$$
$$\text{pour } \nu_1 = n - p = 41,$$
$$\text{et } \nu_2 = p - 2 = 7.$$

Dix des douze valeurs expérimentales de F sont inférieures au plus petit des deux seuils de signification, F_0 (0,05). Deux valeurs de F (gisement de Ressaix; couples de variables l, c et l, c_3) sont comprises entre les seuils F_0 (0,05) et F_0 (0,01). Cette dernière circonstance ne peut empêcher d'admettre, de façon générale, la conclusion d'acceptation de l'hypothèse soumise aux tests statistiques. On notera par ailleurs que c et c_3 sont, en général, pratiquement de longueurs égales. Il n'est dès lors nullement surprenant d'obtenir des résultats analogues pour les couples l, c et l, c_3.

La première conclusion de l'ensemble des tests préliminaires appliqués ici est la constatation de la validité de l'hypothèse selon laquelle les mesures des caractères morphologiques mesurés sont liées par des relations d'allométrie du type défini par M. G. TEISSIER ([39]).

La seconde conclusion est que ces relations d'allométrie sont caractéristiques d'une population homogène au sens de la statistique. Ceci n'est pas en contradiction nécessaire avec l'état de thanatocœnose sous lequel se présentent ces populations.

De plus, une population homogène est essentiellement caractérisée par certaines constantes qui apparaissent explicitement dans l'expression mathématique de la fonction de distribution supposée connue et dans des expressions qui en dérivent. En particulier, les constantes de croissance et les indices-origine figurant dans les équations de régression et relations d'allométrie sont caractéristiques de populations homogènes au sens de la statistique. De plus, les premières ont une signification biologique précise, vraisemblablement de valeur bio-spécifique.

§ 4. ESTIMATION DES CONSTANTES DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

L'estimation des constantes que G. TEISSIER a dénommées constantes de croissance et indices-origine ([40]) revient à appliquer les formules (17) et (18) aux valeurs mesurées des variables X et Y.

La variable X est le logarithme de l, mesure du diamètre antéro-postérieur. Quant à la variable Y, elle est prise successivement égale aux logarithmes de la

---

([39]) TEISSIER, G., 1937, pp. 25-27.
([40]) TEISSIER, G., 1937, pp. 25-27.

mesure du diamètre margino-latéral c et de la mesure des cordes transversales c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Les couples de variables (X, Y) entre lesquels existent les relations d'allométrie validées par les tests décrits au § 3 sont donc, pour chacun des gisements étudiés :

$$\log l, \quad \log c;$$
$$\log l, \quad \log c_1;$$
$$\log l, \quad \log c_2;$$
$$\log l, \quad \log c_3;$$
$$\log l, \quad \log c_4;$$
$$\log l, \quad \log c_5.$$

Du point de vue théorique, on peut se demander s'il n'est pas opportun de substituer aux six relations d'allométrie qu'on déduit de l'estimation des six paires de constantes a et w, une seule relation entre les sept variables l, c, c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5. Cette relation, qui serait une équation de régression multiple [41] issue de la considération du complexe de ces sept variables aléatoires, apparaît dépourvue de valeur pratique.

Il importe surtout, en effet, de bien préciser la variabilité de la forme de la valve au cours de la croissance. A cet égard, les lois de croissance relative de plusieurs grandeurs linéaires bien définies et en nombre suffisant, par rapport à une même grandeur linéaire caractéristique, sont très représentatives.

Les relations d'allométrie, considérées simultanément, permettront notamment de reproduire graphiquement la forme d'une valve à divers stades de la croissance, représentés par une suite croissante de valeurs de l, diamètre antéro-postérieur.

En effet, pour chacune de ces valeurs de l, on peut calculer les valeurs les plus probables de c, c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 et éventuellement, pour plus de précision, leur dispersion et les intervalles de sécurité hors desquels il est très peu probable de trouver des mesures appartenant à une valve de la même population homogène ou, par application de ce qui a été dit à leur sujet, de la même espèce.

Les calculs ont porté sur les mesures effectuées sur 211 valves provenant du gisement de Wérister et 320 valves provenant du gisement de Ressaix. Un extrait des tables des logarithmes des mesures effectuées, exprimées en centièmes de millimètre est joint en hors-texte. Les résultats essentiels des nombreux calculs conduisant aux estimations des constantes des relations d'allométrie figurent à la suite de ces extraits, de même qu'un tableau groupant les relations d'allométrie obtenues pour les deux gisements (tableaux hors texte n°s VI à VII).

Il a paru indispensable d'illustrer ces résultats par une représentation graphique parlante. Les planches hors texte A à F représentent dans un système d'axes gradués en coordonnées logarithmiques les droites de régression corres-

---

[41] HOEL, P., 1948, pp. 110-114.

pondant aux estimations obtenues des constantes, Une figure est établie pour chacun des couples de variables (l, c_1) envisagés et chacune de ces figures porte deux droites obtenues à partir des échantillons de chacun des deux gisements.

De plus, chaque figure porte trente points correspondant à deux échantillons de quinze valves prises au hasard dans les collections de chacun des deux gisements. La concentration des points autour des droites de régression, elles-mêmes voisines l'une de l'autre, est remarquable. D'intuition, cette concentration permet de croire à la valeur hautement significative, du point de vue statistique, de ces droites de régression, c'est-à-dire, en définitive, des relations d'allométrie.

De façon générale, les valves issues du gisement de Ressaix sont de taille inférieure à celles du gisement de Wérister. Le chevauchement des intervalles des longueurs des deux échantillons de quinze individus est suffisant, cependant, pour faire apparaître sur les graphiques la *similitude et la continuité des lois de croissance relatives aux deux populations étudiées.*

On obtient déjà de la sorte une comparaison, graphique, entre les lois de croissance relatives obtenues à partir de chacun des deux échantillons. *Elle laisse présumer une conspécificité des individus constituant les populations des deux gisements étudiés;* son examen fait l'objet du § 5.

On trouvera ci-après deux tableaux contenant les équations des droites de régression et les relations d'allométrie correspondantes. Rappelons que l'équation dite de régression est la forme logarithmique de la relation d'allométrie.

GISEMENT DE WÉRISTER		
	Équations des droites de régression	Relations d'allométrie
c en l	$Y - 2{,}29049394 = 0{,}91178\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}91178\,X + 0{,}01217527$	$c = 1{,}028\,l^{0{,}91178}$
c_1 en l	$Y - 2{,}15674002 = 0{,}93554\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}93554\,X - 0{,}18694917$	$c_1 = 0{,}6502\,l^{0{,}93554}$
c_2 en l	$Y - 2{,}26202067 = 0{,}01470\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}91470\,X - 0{,}02359438$	$c_2 = 0{,}9471\,l^{0{,}91470}$
c_3 en l	$Y - 2{,}28970142 = 0{,}90957\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}90957\,X + 0{,}01690501$	$c_3 = 1{,}040\,l^{0{,}90957}$
c_4 en l	$Y - 2{,}26322934 = 0{,}92546\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}92546\,X - 0{,}04927236$	$c_4 = 0{,}8922\,l^{0{,}92546}$
c_5 en l	$Y - 2{,}16129651 = 0{,}95592\,(X - 2{,}49875921)$ $Y = 0{,}95592\,X - 0{,}22731739$	$c_5 = 0{,}5925\,l^{0{,}95592}$

GISEMENT DE RESSAIX		
	Équations des droites de régression	Relations d'allométrie
c en l	$Y - 1{,}99169665 = 0{,}88160\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}88160\ X + 0{,}04921514$	$c = 1{,}120\ l^{0{,}88160}$
c_1 en l	$Y - 1{,}83433899 = 0{,}89000\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}89000\ X - 0{,}12665073$	$c_1 = 0{,}7470\ l^{0{,}89000}$
c_2 en l	$Y - 1{,}95702708 = 0{,}88532\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}88532\ X + 0{,}00634908$	$c_2 = 1{,}015\ l^{0{,}88532}$
c_3 en l	$Y - 1{,}99097570 = 0{,}88864\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}88864\ X + 0{,}03298254$	$c_3 = 1{,}078\ l^{0{,}88864}$
c_4 en l	$Y - 1{,}96636914 = 0{,}89579\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}89579\ X - 0{,}00737803$	$c_4 = 0{,}9832\ l^{0{,}89579}$
c_5 en l	$Y - 1{,}85555509 = 0{,}89964\ (X - 2{,}20335924)$ $Y = 0{,}89964\ X - 0{,}12667502$	$c_5 = 0{,}7470\ l^{0{,}89964}$

Un examen des constantes de la croissance (exposant de la variable l dans les relations d'allométrie) pour les individus des deux populations montre que sa valeur est inférieure à l'unité. *On en déduit que la croissance de la taille (l, diamètre antéro-postérieur) est relativement plus grande que celle des cordes ou diamètres transversaux.*

D'autre part, la valeur des constantes de croissance dans les relations d'allométrie entre c_3, c_4, c_5 et l augmente dans l'ordre des indices. Ceci indiquerait la *tendance vers la parallélisation, voire vers l'écartement, des bords latéraux des valves dans la région antérieure du test au cours de la croissance.* Cet aspect du rebord libre est caractéristique des individus séniles et des formes évoluées.

§ 5. TEST DE COMPARAISON ENTRE LES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE DES DEUX POPULATIONS.

Il s'agit du test dont les bases théoriques ont été exposées au chapitre II, § *g*, et dont l'objet est de permettre de conclure soit à une différence significative entre les droites de régression obtenues à partir des mesures effectuées sur les individus de chacun des deux échantillons, soit à l'absence d'une telle différence, les écarts observés étant attribuables au caractère aléatoire de la constitution des échantillons.

Rappelons que, dans le premier cas, il faut conclure que les valves des deux échantillons sont morphologiquement différentes et l'identité des populations est du même fait fort peu vraisemblable; dans le second cas, l'hypothèse de l'identité morphologique est légitimement admissible et la conclusion d'identité biologique entre les populations peut s'appuyer sur un argument bien établi.

a) La première application de la méthode décrite au chapitre II, § *g*, porte sur les deux échantillons de 50 individus, définis au § 3 du présent chapitre, auxquels a été appliqué le test de validité de l'emploi des relations d'allométrie.

Pour chacun des six couples de variables (l, c), (l, c_1), (l, c_2), (l, c_3), (l, c_4) et (l, c_5) on a tout d'abord procédé au calcul des valeurs de la variable t définie par la formule

$$t = \frac{a' - a''}{\sqrt{\dfrac{\Sigma\,(Y'_{jk} - \overline{Y}')^2 + \Sigma\,(Y''_{jk} - \overline{Y}'')^2}{n' + n'' - 2p}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\Sigma\, n'_j\,(X'_j - \overline{X}')^2} + \dfrac{1}{\Sigma\, n''_j\,(X''_j - \overline{X}'')^2}}}.$$

Dans cette formule, a' et a'' représentent les estimations des constantes de croissance tirées des échantillons des gisements de Wérister (index ′) et de Ressaix (indèx ″). La variable t ainsi définie est utilisée dans le but de vérifier l'hypothèse selon laquelle *la différence entre les constantes de croissance se rapportant à chacun des deux gisements n'est pas significative.*

On a trouvé les valeurs suivantes de t pour les couples de variables indiqués :

Relations d'allométrie entre :	Valeurs de t
l et c	1,268
l et c_1	0,644
l et c_2	1,590
l et c_3	1,265
l et c_4	1,361
l et c_5	1,976

Seuils de signification : t_0 (0,05) = 1,989;
t_0 (0,01) = 2,637.

La conclusion uniforme de ce test de comparaison est *la constatation de la validité de l'hypothèse selon laquelle les différences entre les constantes de croissance* a′ *et* a″ (*Wérister et Ressaix*) *et entre les relations d'allométrie ne sont pas significatives. En d'autres termes, la croissance chez les individus des deux populations est parallèle. Pour les éléments de ces deux populations, à taille égale, les accroissements correspondants des différentes cordes ou diamètres transversaux sont pratiquement égaux. Sur la base des caractères mesurés l'identité morphologique des individus qui composent ces populations est légitimement admissible.*

Aucun autre caractère différentiel n'ayant été relevé entre les *Lingula mytilloides* des gisements de Wérister et de Ressaix, nous admettons la conclusion de conspécificité.

On remarquera cependant que, d'une façon régulière, les constantes de croissance des pièces du gisement de Ressaix sont légèrement plus petites que celles du gisement de Wérister. Bien qu'on ne puisse interpréter pertinemment la nuance indiquée en l'absence d'indices sérieux sur sa cause réelle, il est pro-

bable que la vitesse de croissance est intervenue. En effet, on sait que celle-ci est plus rapide chez les jeunes individus que chez les adultes et qu'elle se manifeste le mieux sur la valeur l, dont la direction est celle de la croissance maximum.

Néanmoins, dans l'intervalle des tailles de grandeur commune aux échantillons des deux gisements, il apparaît une excellente concordance entre les lois de croissance relative des deux populations. En effet, à titre vérificatif, on a prélevé, au hasard, un échantillon composé de 20 valves du gisement de Ressaix et un échantillon de même importance issu du gisement de Wérister, mais d'individus choisis systématiquement. Ce choix a porté sur les tailles, toutes comprises dans l'intervalle des grandeurs de taille extrême du premier échantillon. Le calcul d'estimation des valeurs des constantes de croissance, pour les deux échantillons, conformément aux méthodes précédemment utilisées, a fourni les valeurs suivantes :

Relations d'allométrie entre :	Valeurs de a	
	Gisement de Wérister	Gisement de Ressaix
l et c	0,8973	0,8885
l et c_1	0,9095	0,8966
l et c_2	0,8987	0,8927
l et c_3	0,8940	0,8953
l et c_4	0,9093	0,9108
l et c_5	0,9342	0,9278

b) La première partie du test de comparaison entre les relations d'allométrie des deux populations a trait aux estimations des constantes de croissance obtenues pour les échantillons des deux gisements.

La deuxième application de ce test a porté sur le second paramètre de la relation d'allométrie, à savoir l'*indice-origine*. Il convient de préciser immédiatement que, des points de vue biologiques ou descriptifs, ce paramètre est d'un intérêt très limité. Il n'apparaît pas qu'une valeur significative intrinsèque puisse lui être attribuée dans le cas étudié ici. Cependant, du point de vue statistique, le résultat d'un test de comparaison portant sur les estimations de ce deuxième paramètre de la relation d'allométrie a une signification de valeur égale aux résultats portant sur les estimations des constantes de croissance. A ce titre, et par souci d'objectivité, les résultats de ce test sont exposés ci-après. Le calcul des valeurs de t repose sur la formule suivante :

$$t = \frac{w' - w''}{\sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{\overline{X}'^2}{\sum_{j=1}^{p} n'_j (X'_j - \overline{X}')^2} + \frac{1}{n''} + \frac{\overline{X}''^2}{\sum_{j=1}^{p} n''_j (X''_j - \overline{X}'')^2}}} \cdot \frac{\sqrt{n' + n'' - 2p}}{\sqrt{\left(\sum_j \sum_k Y'^2_{jk} - \Sigma n'_j \overline{Y}'^2_j\right) + \left(\sum_j \sum_k Y''^2_{jk} - \Sigma n''_j \overline{Y}''^2_j\right)}}.$$

On obtient les résultats suivants :

Relations d'allométrie entre :	Valeurs de t
l et c	1,601
l et c_1	1,303
l et c_2	1,029
l et c_3	0,733
l et c_4	1,243
l et c_5	1,727

Seuils de signification : t_0 (0,05) = 1,989;
(ν = 82) t_0 (0,01) = 2,637.

Conclusion uniforme : acceptation de l'hypothèse.
Différence entre w' et w'' non significative.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Comme il a été dit au début du chapitre II, l'examen des deux populations principales étudiées ici posait une série de problèmes que nous résumons ainsi :

1. Quelle est l'influence de la déformation des valves sur les grandeurs mesurées en vue de caractériser les populations examinées ?
2. Quelle est la variabilité de la forme des valves au cours de la croissance ? Peut-on rapporter cette variabilité à une « loi de croissance », du type défini par G. Teissier, à caractère spécifique ? Dans l'affirmative, quels sont les paramètres et les constantes de cette représentation mathématique ?
3. Y a-t-il identité de caractères morphologiques et identité spécifique entre les individus des deux populations principales examinées ?

Chacun de ces problèmes revenait à vérifier l'exactitude ou au moins l'acceptation d'une hypothèse par des méthodes de la statistique mathématique au moyen de tests de signification. L'application de ces méthodes développées dans ce chapitre a permis les conclusions reprises ci-dessous :

1. Les différences observées dans les mesures des valves intactes et déformées ne sont pas significatives. Elles ont un ordre de grandeur de 2 à 3 %, soit de la même valeur que l'erreur due à l'imprécision de la mesure. En d'autres termes, les mesures effectuées sur des valves déformées peuvent être utilisées telles quelles, sans corrections préalables, dans des calculs effectués en vue de caractérisation morphologique ou d'identification par la voie de méthodes statistiques.

2. La variabilité de la forme des valves (caractères l, c, c_1, c_2, etc.) au cours de la croissance obéit à une loi de croissance relative. Ces caractères sont liés par des relations d'allométrie du type $Y = kx^{\gamma}$, défini par G. Teissier. Pour chacune des deux populations les paramètres et constantes de ces relations ont

été établis (voir tableaux pp. 43 et 44). Dans les deux populations, dont les individus ont une taille moyenne ou peu différente, il y a similitude et continuité des lois de croissance. On constate que l'augmentation de la taille (l, diamètre antéro-postérieur) est relativement plus grande que celle des cordes ou diamètres transversaux, comme l'avait déjà noté H. Wehrli (voir p. 9). La valeur des constantes de croissance dans les relations d'allométrie liant l et les cordes transversales augmente, au cours de la croissance, de la région postérieure vers la région antérieure.

3. Pour chacune des deux populations, les constantes de croissance et les indices-origines des relations d'allométrie sont caractéristiques d'une population homogène, au sens de la statistique, et les premières ont une valeur biospécifique.

La différence entre les constantes de croissance et entre les relations d'allométrie des deux populations n'est pas significative. En d'autres termes, la croissance chez les individus des deux populations est parallèle et l'identité morphologique des individus des deux populations étant légitimement admissible, on conclut à une conspécificité de ceux-ci.

Ces conclusions favorables des tests de comparaison des relations d'allométrie ont permis légitimement de grouper les échantillons des deux gisements, comprenant au total 531 individus, et de calculer pour cet échantillon unique les estimations des constantes de croissance.

Ces données, et d'autres réunies pour préciser la définition de l'espèce *Lingula mytilloides*, font l'objet du chapitre IV.

CHAPITRE IV

Morphologie de *Lingula Mytilloides* Sowerby.

§ 1. NATURE ET PLASTICITÉ DU TEST.

Parmi les milliers de spécimens que nous avons examinés, un certain nombre d'entre eux, provenant surtout du gisement de Wérister, nous ont permis d'observer le test, en assez bon état de conservation, bien que modifié par la fossilisation. Chez les espèces actuelles, en particulier chez *Lingula anatina*, la plus étudiée, le test est formé par un complexe de lames cornées alternant, en superposition, avec des lames calcaro-phosphatées. Les couches cornées sont de structure fibreuse, à fibres parallèles à la surface; les lamelles ou écailles minéralisées sont, elles, plus irrégulières, mais toujours criblées de canalicules perpendiculaires à leur surface [42]. De plus, la face intérieure des valves montre le test fortement chargé de calcaire dans les régions médianes et postérieures.

Rappelons que, d'après une analyse ancienne effectuée par E. Cloez, la composition centésimale du test de *Lingula anatina* serait :

Matière organique	45,20
Carbonate de chaux...	6,68
Phosphate de chaux	42,29
Phosphate de magnésium	3,85
Phosphate de fer	1,98
	100,00

Chez les Lingules du Westphalien, le test, quand il est conservé, se présente comme une pellicule brunâtre, translucide, cassante, extrêmement fragile. Nous présumons qu'il constitue l'ensemble des couches cornées, fibreuses, privées des lames minéralisées, qui ont dû disparaître très tôt lors de la fossilisation, en un milieu acide.

Divers aspects du test de Lingules westphaliennes sont présentés aux figures 1 à 7 et 9 de la planche I. Remarquons que, d'une façon générale, la face extérieure de ce test est ornée de très fines stries concentriques, tandis que la face intérieure est soit lisse, soit d'aspect chagriné. Dans la région médiane, et

(42) Gratiolet, P., 1860, pp. 59-63.

surtout dans la région antérieure de la valve, on aperçoit quelquefois un réseau très fin de stries radiaires (fig. 8 et 9 de la Pl. I) qui fait partie de la texture du test corné. Ces éléments sont d'observation facile chez *Lingula anatina* (Pl. IV, fig. 15). Fréquemment ce test et même la pellicule de sédiment qui constitue l'éponte de son moulage sont diaclasés (Pl. I, fig. 1 à 5). L'exemplaire de Lingule représenté à la figure 3 de la planche I permet d'observer un cas d'émiettement du test corné qui apparaît avoir été divisé en petits fragments brillants entourant encore l'empreinte de la valve. Quelques spécimens offrent une épigénèse calcaire complète du test, d'autres l'empreinte d'un test épigénisé, puis carié par dissolution (Pl. II, fig. 1 et 2). Il a été également observé des dépôts plus superficiels dus aux eaux de circulation (Pl. II, fig. 3).

La dissolution des lamelles calcaro-phosphatées du test, dès l'enfouissement des valves, a rendu ces dernières très flexibles. Nous avons pu confirmer ce caractère, des plus importants pour l'étude morphologique des formes fossiles, en traitant des tests de Lingules actuelles par l'acide fluorhydrique. Après disparition de leurs parties minéralisées, les valves, réduites à leur structure cornée et allégées, acquièrent une grande flexibilité. Après avoir subi ce traitement, les valves peuvent supporter un écrasement, un aplatissement complet en ne présentant que très peu de déchirures ou de délabrements.

Quelques exemples de déformation accidentelle qui illustrent bien la flexibilité du test sont présentés aux figures 4, 5, 6, 8 de la planche II. Le phénomène d'aplatissement dans le plan de séparation des valves est très général et n'entraîne que peu de rupture ou de bris (voir Pl. II, fig. 5, 7 et 8). Certains moulages de tests présentent de petits plis marginaux dont l'origine paraît être postérieure à la dissolution du test (fig. 7 de la Pl. II).

La flexibilité du test corné paraît une des causes essentielles de la variabilité du contour et du modelé très nuancés des empreintes de valves des Lingules westphaliennes qui sont communément observées. Dans un même gisement, il est possible de discerner de nombreux degrés dans l'arc de la courbure de la carène médiane réduite ou accentuée mécaniquement ou dans l'aplatissement des tests. Une étude du relief des valves fait l'objet du § 6.

§ 2. ORNEMENTATION. — VALVES VENTRALES ET DORSALES.

Comme il a été dit plus haut, la face interne du test corné apparaît être le plus généralement lisse. Occasionnellement, elle est ornée de nombreuses petites dépressions, particulièrement dans les régions du crochet et de la carène, qui donnent à l'empreinte du test un aspect localement pustuleux.

Les stries radiaires, très fines et qui apparaissent dans la structure du test corné, comme nous l'avons vérifié chez la *Lingula anatina*, seraient étrangères à l'ornementation superficielle.

La face extérieure du test, porteuse de l'ornementation, montre celle-ci

constituée essentiellement par une décoration linéaire concentrique. Cette striation très fine, serrée et régulière sur tout l'ensemble du test, l'est davantage dans la région postérieure (voir fig. 9 et 10 de la Pl. II et 1 de la Pl. III). Elle permet dans certaines limites une estimation du contour du rebord libre de la valve aux différents stades de la croissance.

Presque tous les spécimens de Lingules houillères présentent une décoration côtelée. Cette ornementation, posthume, est due à l'écrasement, si faible soit-il, au cours de la fossilisation. Elle est constituée par des côtes concentriques, plus ou moins régulières, de nombre et de développement variables. Ces ornements sont nés de la constriction ou du chiffonnage des surfaces gauches du test au cours de l'aplatissement et aussi, probablement, de l'affaissement des lames cornées les unes sur les autres (voir fig. 10 de la Pl. II). Ces déformations ont pu rider quelquefois le test (fig. 3 de la Pl. III) d'une façon semblable au périostracum de certains Lamellibranches du Houiller, tels qu'*Anthraconauta* et *Naiadites*.

Un aspect particulier des empreintes de Lingules qui pourrait être mis, à tort, sur le compte de l'ornementation habituelle des valves, est l'existence de deux lignes en V étroit, observées dans la région médiane, au départ de l'umbo (voir Pl. III, fig. 4, 5, 6, 8 et 11). Cette fausse décoration est le résultat d'un accident commun, posthume mais antérieur à la fossilisation de la valve. En effet, la dessiccation d'une valve, à l'air libre, produit outre le retroussement des bords marginaux du test, plus minces, une constriction des couches superficielles du test dans la région médiane. Cette constriction du test entraîne la formation de deux plis longitudinaux bien observés chez *Lingula anatina* (voir fig. 13, Pl. IV), souvent accompagnés d'une rupture du test dans la région cardinale, tant chez les Lingules actuelles que chez les individus paléozoïques (Pl. III, fig. 8 et 11, et Pl. IV, fig. 13).

Signalons encore l'observation exceptionnelle d'un *Vermes* inc. sed. sur une Lingule houillère (fig. 2 de la Pl. III).

Comme il a été dit, page 9, les différences de formes et de taille entre valves ventrales et dorsales d'un individu sont peu perceptibles et seuls les spécimens en très bon état de conservation permettent une certaine appréciation sur ce point. Le gisement de *L. mytilloides* du Bois-du-Luc (voir p. 12) a livré un bon nombre d'exemplaires de valves appariées qui ont permis un essai de discrimination par comparaison des diamètres antéro-postérieurs. Il semble que pour quelques très bonnes pièces examinées, cette différence de taille soit de l'ordre de 4,5 %, à peine supérieure donc à l'erreur de mesure. L'aspect acuminé (valve ventrale) ou arrondi (valve dorsale) de l'umbo, distingué sous un grandissement élevé, permet, d'autre part, une certaine sélection, car le retrait, *post mortem*, du canal pédonculaire de la valve ventrale accentue ce caractère, peu marqué en général (voir Pl. III, fig. 4, 5, 6 et 14 pour les valves ventrales et Pl. III, fig. 8 et 9 pour les valves dorsales). D'autre part, il n'est pas exclu que les deux

principaux types de profil des valves rencontrées (voir § 5, p. 58) ne soient caractéristiques de l'une ou de l'autre valve. Mais seul un matériel exceptionnellement bien conservé pourrait apporter des précisions numériques sur cette différence morphologique.

§ 3. CARACTÈRES D'UN « TYPE MOYEN » DE *LINGULA MYTILLOIDES*.

En conclusion des tests de comparaison des relations d'allométrie présentés au § 5 du chapitre III, il a été admis l'identité morphologique des individus composant les populations étudiées, et subséquemment leur conspécificité. Il restait à tenter d'établir sur la base des échantillons groupés, comprenant au total 531 individus, les caractères morphologiques de ce que l'on pourrait appeler un « type moyen », premier pas vers la définition d'un « type statistique » à valeur taxonomique [43] [44]. Les éléments réunis dans ce but portent sur les valeurs des tailles — ou diamètres antéro-postérieurs — et des diamètres margino-latéraux (c), basés sur les constantes et paramètres de la loi de croissance relative et sur les formes géométriques des profils et du rebord libre.

A. Valeurs de référence des constantes des relations d'allométrie.

Les calculs, conduits comme ceux partiellement reproduits dans les tableaux VI et VII, fournissent les résultats consignés dans le tableau suivant :

Constantes des relations d'allométrie.
(Échantillons des deux gisements réunis.)

	Équations des droites de régression	Relations d'allométrie	Dispersion
c en l	Y = 2,11042779 = 0,89359 (X — 2,32074041) Y = 0,89359 X + 0,03663737	$c = 1{,}088\ l^{0{,}89359}$	0,0438
c_1 en l	Y — 1,96244939 = 0,90810 (X — 2,32074041) Y = 0,90810 X — 0,14501498	$c_1 = 0{,}7161\ l^{0{,}90810}$	0,0503
c_2 en l	Y — 2,07822040 = 0,89699 (X — 2,32074041) Y = 0,89699 X — 0,00346054	$c_2 = 0{,}9922\ l^{0{,}89699}$	0,0411
c_3 en l	Y — 2,10967840 = 0,89696 (X — 2,32074041) Y = 0,89696 X + 0,02806708	$c_3 = 1{,}067\ l^{0{,}89696}$	0,0427
c_4 en l	Y — 2,08433055 = 0,90758 (X — 2,32074041) Y = 0,90758 X — 0,02192703	$c_4 = 0{,}9508\ l^{0{,}90758}$	0,0440
c_5 en l	Y — 1,97704557 = 0,92200 (X — 2,32074041) Y = 0,92200 X — 0,16267709	$c_4 = 0{,}6876\ l^{0{,}92200}$	0,0491

[43] Simpson, G. C., 1940, pp. 417-420.
[44] Newell, N. D., 1949, pp. 134-142.

Ce tableau contient également les estimations de la *dispersion* des valeurs observées de Y (ou log. l) autour des valeurs théoriques provenant de l'application des équations de régression.

Cette dispersion a une signification particulièrement précieuse pour l'identification ou la comparaison.

Géométriquement, pour chacun des couples de variables (X, Y) envisagés, la dispersion σ permet de définir une bande comprise entre les deux parallèles

$$Y = aX + w - 3\sigma \quad \text{et} \quad Y = aX - w + 3\sigma$$

comprenant, théoriquement, la quasi-totalité des points (X, Y) correspondant à des valeurs observées de X, Y.

Inversement, on peut considérer comme très vraisemblable l'appartenance à la population ou à une population identique, d'individus isolés ou groupés en échantillons, dont les valeurs (X, Y) définissent des points situés dans la bande ci-dessus limitée.

B. Diamètres antéro-postérieurs et margino-latéraux.

A partir des valeurs de référence des constantes d'allométrie établies, il a été calculé les caractères dimensionnels — longueur et largeur des valves — de *Lingula mytilloides* de la population unique, rangées par valeur croissante de l, de 0,5 à 6 mm. Les données du tableau suivant et leur transcription géométrique en la figure de la planche hors texte G constituent un « modèle mathématique » ou, plus exactement, un « modèle statistique » de l'espèce étudiée. De plus, les figures 1 à 10 de la planche IV présentent une série de sujets, peu ou pas déformés, rangés par taille décroissante.

On notera, comme il a déjà été dit, l'élongation progressive des valeurs du rapport $\frac{c}{l}$, qui est très significative pour c_5 de la tendance générale à l'élargissement des valves dans la région antérieure au cours de la croissance. D'autre part, il y a grande similitude de valeurs pour les diamètres transversaux c (maximum) et c_3 $\left(\text{diamètre de position } \frac{l}{2}\right)$.

Lingula mytilloides SOWERBY.

N°	l	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	50	36	25	33	36	33	25
2	75	52	36	48	51	48	37
3	100	67	47	62	66	62	48
4	125	81	57	75	81	76	59
5	150	96	68	89	95	90	70

N°	l	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
6	175	110	78	102	109	103	80
7	200	124	88	115	124	117	91
8	225	138	98	128	137	130	101
9	250	151	108	140	151	143	112
10	275	165	118	153	164	156	122
11	300	178	127	165	178	168	132
12	325	191	137	178	191	181	142
13	350	204	146	190	204	194	152
14	375	217	156	202	217	206	163
15	400	230	165	214	230	218	172
16	425	242	175	226	243	231	182
17	450	256	184	238	256	243	192
18	475	268	193	250	268	256	202
19	500	281	202	261	281	268	212
20	525	293	211	273	293	280	222
21	550	306	221	285	306	292	231
22	575	318	230	296	318	304	241
23	600	330	239	308	330	316	250
	Grandeurs exprimées en 1/100 de mm						

Pour les individus de taille (l) inférieure à 0,5 mm, aucune récolte suffisante n'a été obtenue jusqu'à présent dans les gisements explorés. Le plus petit diamètre c mesuré, d'une longueur de 0,408 mm, correspond à une taille de 0,385 mm, longueur du diamètre antéro-postérieur.

Pour compléter les données réunies sur la taille et les diamètres transversaux, il a été examiné les stries d'accrétion des jeunes stades sur les valves d'individus adultes présentant une ornementation bien conservée (voir, par exemple, Pl. II, fig. 9; Pl. III, fig. 1). On sait que les stries « enregistrent par leur tracé les valeurs comparées de la croissance en tous les points de la partie sécrétante » (H. TERMIER). Ces stries ou lignes d'incrément sont l'image, quelquefois déformée, du rebord libre des valves aux divers stades népioniques, néalogiques, éphéboliques, etc. ([45]) du développement de la coquille vraie. Les

([45]) BEECHER, C. E., 1892, p. 154.

longueurs et largeurs de ces contours valvaires observés, qui s'étendaient de 0,2 à 0,4 mm (l), sont reprises au tableau ci-dessous.

c (en mm)	l (en mm)	$\frac{c}{l}$
0,248	0,267	1,076
263	270	1,025
285	293	1,028
289	279	0,965
307	300	0,977
353	340	0,991
410	390	0,985

L'erreur due à l'imprécision de la mesure est en moyenne de 5 %.

Si l'on s'en réfère, à titre de comparaison analogique, aux études d'embryologie sur les Lingules actuelles, les dimensions de valves houillères, de rapport $\frac{c}{l}$ voisin de l'unité, correspondraient à celles de larves libres nageantes, munies de six à sept paires de cirrhes (voir travaux de W. K. Brooks, N. Yatsu). On notera qu'à ce stade la croissance de la coquille vraie est en cours; elle succède à la coquille embryonnaire, avant la venue des caractères spécifiques définitifs. Néanmoins, il a été constaté que les valeurs mesurées du diamètre margino-latéral c sont proches des valeurs théoriques de l'échantillon commun calculées au moyen des équations de régression et des relations d'allométrie, — l'écart maximum étant inférieur à 10 %, — ce qui méritait d'être signalé.

A titre de simple indication, un examen de ces mêmes données prises chez l'espèce actuelle *Lingula anatina* Bruguière, d'après les travaux de W. K. Brooks et de N. Yatsu [46] [47], fournit les résultats suivants :

c (en mm)	l (en mm)	$\frac{c}{l}$
0,189	0,140	1,350
298	176	1,692
321	200	1,606
383	313	1,224
432	411	1,050
688	663	1,038
926	930	0,996
848	1,050	0,808

[46] Brooks, W. K., 1879, pl. II et IV.
[47] Yatsu, N., 1908, pl. III, V et VI.

La valeur du rapport $\frac{c}{l}$ varie d'une façon irrégulière, attribuable vraisemblablement au petit nombre d'individus. Toutefois, il est possible d'en dégager une constatation : la croissance relative de l par rapport à c, pour cette espèce, est très rapide, apparemment plus que chez *Lingula mytilloides*.

Aux éléments dimensionnels (diamètres antéro-postérieurs et margino-latéraux) caractéristiques du type moyen de *Lingula mytilloides* ont été comparées les données correspondantes des deux espèces les plus proches, par la taille principalement : *L. squamiformis* PHILLIPS et *L. elongata* DEMANET, du Terrain houiller. A défaut de disposer d'un échantillon numériquement équivalent, quelques sujets de ces espèces ont été choisis pour mensuration parmi les meilleures pièces des collections de l'Institut royal des Sciences naturelles de Belgique, déterminées presque toutes par M. F. DEMANET. Le tableau ci-dessous présente leurs caractères dimensionnels, rangés par valeur croissante de l.

Lingula elongata DEMANET.

N°	l	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$\frac{c}{l}$
6	385,00	205,00	153,75	197,50	205,00	195,00	155,00	0,532
9	442,50	235,00	165,00	205,00	235,00	222,50	181,25	0,531
16	720,00	340,00	235,00	305,00	337,50	332,50	282,50	0,472
4	732,50	332,50	230,00	315,00	330,00	305,00	245,00	0,453
15	830,00	417,50	315,00	400,00	417,50	410,00	336,25	0,503
14	837,50	410,00	310,00	390,00	410,00	405,00	377,50	0,489
3	846,25	387,50	307,50	377,50	382,50	372,50	330,00	0,457

Grandeurs exprimées en 1/100 de mm

Lingula squamiformis PHILLIPS.

N°	l	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$\frac{c}{l}$
5	317,50	225,00	172,50	215,00	225,00	212,50	170,00	0,708
21	355,00	272,50	202,50	255,00	272,50	252,50	195,00	0,767
13	425,00	328,75	255,00	312,50	328,75	312,50	260,00	0,773
7	445,00	303,75	240,00	300,00	303,75	297,50	242,50	0,682
8	637,50	400,00	322,50	340,00	400,00	377,50	315,00	0,627
12	802,50	515,00	412,50	490,00	515,00	495,00	408,75	0,624
11	1.195,00	717,50	572,50	695,00	717,50	690,00	575,00	0,600
1	1.392,50	875,00	697,50	852,50	875,00	845,00	707,50	0,628
2	1.575,00	852,50	597,50	772,50	845,00	825,00	685,00	0,541

Grandeurs exprimées en 1/100 de mm

Pour les deux espèces on observe :

a) une grande similitude de valeurs pour les diamètres transversaux c (maximum) et c_3, tout comme chez *L. mytilloides*;

b) une similitude de valeurs, pour les cordes correspondantes, de part et d'autre de c_3, $(c_2 - c_4)$ et $(c_1 - c_5)$, alors que chez *L. mytilloides* les valeurs de c_4 et c_5 sont légèrement supérieures aux valeurs de c_2 et c_1.

Pour *L. elongata*, dans les limites des tailles comparées (voir tableau p. 60), à valeur égale de l, *tous les diamètres margino-latéraux* ont des *valeurs inférieures* aux cordes correspondantes de *L. mytilloides*. Corrélativement, le rapport $\frac{c}{l}$ s'établit plus bas, proche ou inférieur à 0,5.

Pour *L. squamiformis*, on observe une situation inverse : toutes les valeurs des c sont supérieures aux cordes correspondantes de *L. mytilloides*, à valeur égale de l. De plus, le diamètre antérieur c_5 présente une valeur élevée, quasiment supérieure à $\frac{l}{2}$, tandis que ce même diamètre est toujours inférieur à $\frac{l}{2}$ chez *L. mytilloides*. L'indice principal $\frac{c}{l}$ est également plus élevé.

Ces quelques comparaisons, issues d'échantillons numériquement fort différents, ne peuvent être précisées davantage pour le moment. Elles indiquent toutefois clairement le sens de la distinction spécifique et une bonne séparation de ces espèces.

§ 4. FORME DU REBORD LIBRE.

Les études dues à M. Lison [48] sur la cinématique du développement conchyliologique de Lamellibranches ont permis de faire apparaître une intéressante propriété géométrique de la courbe du rebord libre. Au cours de leur développement, dans les limites des tailles observées, la courbe du rebord libre, généralement plane et située dans le plan de séparation de la coquille, reste semblable à elle-même. Ce fait peut conduire le statisticien à tenter de chercher un modèle mathématique simple de cette courbe, c'est-à-dire une équation analytique. Cette équation, pour autant qu'elle soit judicieusement choisie par application de méthodes statistiques, contribuerait grandement à caractériser le « type moyen » des individus d'une population.

Dans le cas de *Lingula mytilloides*, les relations d'allométrie et les estimations de leurs paramètres ont mis en évidence la variabilité de la forme de la courbe du rebord libre (chap. III, §§ 1 à 4).

Dès lors, on pourrait envisager de ramener à une même forme analytique les équations des rebords libres de valves des diverses tailles examinées ici

---

[48] Lison, M., 1949.

($l = 0{,}385$ à 7,4 mm) d'une même population. Les paramètres figurant dans ces équations varieraient, par exemple, en fonction de la taille de la valve. Même s'il en était ainsi, la complexité mathématique abstraite de ces paramètres réduirait singulièrement l'intérêt de leur éventuelle signification spécifique.

En ce qui concerne les Lingules des échantillons provenant des gisements explorés, il est apparu que la variabilité de la forme des valves au cours de la

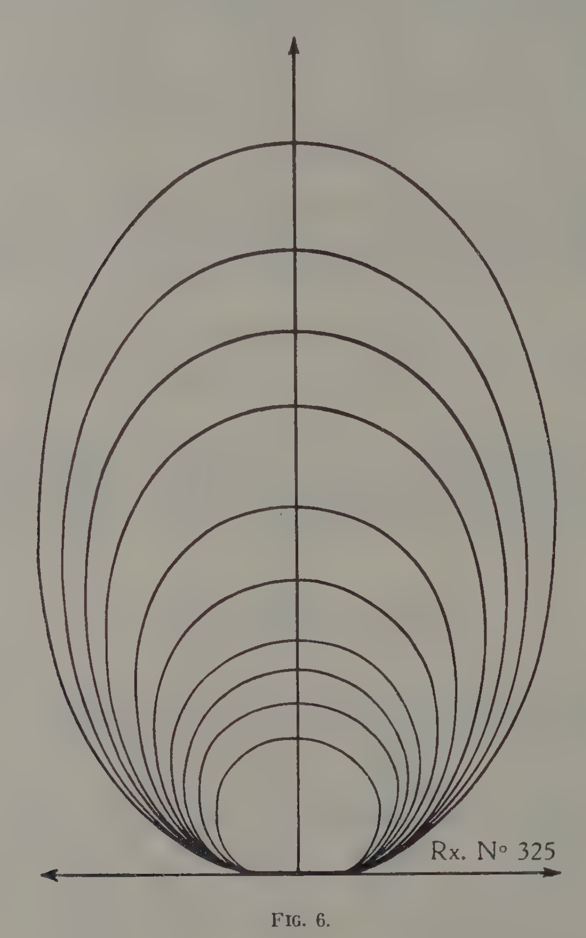


Fig. 6.

croissance (voir fig. 6 et Pl. G) ne permettait pas de la représenter analytiquement, au moyen d'un seul type d'équation. En effet, il a été constaté que les rebords libres au stade népionique étaient quasiment elliptiques. La symétrie parfaite de l'ellipse disparaît progressivement au cours de la croissance (élongation de la valve), si bien que pour les valves des plus grandes tailles (7 mm), les courbes ont une forme qui peut être approximativement représentée par une équation du quatrième degré. Ce choix est toutefois arbitraire. Il résulte uniquement d'un rapprochement entre les courbes observées et certains modèles géométriques connus.

A côté de la forme du rebord libre, sa longueur a fait l'objet d'examens pour une éventuelle utilisation.

Des mensurations d'un petit nombre de sujets ont montré qu'une relation linéaire existe, de façon assez approchée, entre la *longueur de la courbe du rebord libre* et la *longueur du diamètre antéro-postérieur* (*l*). De plus, il semble que d'une espèce à l'autre, on puisse observer une différence significative entre les pentes des droites représentatives — géométriquement — des relations linéaires précitées.

Ces relations sont analogues à des droites de régression dont on a étudié au chapitre II les méthodes statistiques définissant l'équation, dont les constantes ont un caractère bio-spécifique.

Le test de différence entre deux équations de régression permettrait de déceler éventuellement des différences ou de porter des jugements d'identité entre individus et entre espèces.

§ 5. PROFILS DES VALVES.

Deux méthodes ont été utilisées pour l'obtention des profils des valves; l'une d'entre elles a également fourni un levé phototopographique très précis de la surface valvaire.

Pour la mesure des profils — qui sont des arcs de courbure variable — il a été fait usage d'un comparateur-palpeur couplé avec une lunette microscopique de pointage. Cette combinaison, installée sur un statif à platines et chariots mobiles, permit d'effectuer point par point des mensurations d'épaisseur, en utilisant le plan de séparation des valves (plan frontal) comme plan de référence. Cet appareillage, qui apporte des résultats précis dans l'étude des courbes simples et limitées, a été utilisé pour l'obtention d'un profil longitudinal ou arc valvaire antéro-postérieur dans le plan de symétrie bilatérale (sagittal).

Une autre méthode, originale, fournissant également des profils, mais permettant en ordre principal une représentation correcte de la « topographie » valvaire, a été mise au point et essayée également avec succès sur des coquilles de Lamellibranches. Cette technique est celle de la photogrammétrie à images conjuguées ou stéréophotogrammétrie qui permet, avec grande précision, la restitution perspective d'un objet spatial [49].

Les mensurations des profils longitudinaux de quelques valves apparemment non déformées ont été effectuées et une représentation de leur courbure est donnée figure 7 et planche III, figure 13 et planche H. En l'absence d'un grand nombre de mesures — qui ne pourraient être effectuées que sur un matériel exceptionnellement bien conservé — il apparaît que dans les limites de l'observation les arcs de courbure du profil longitudinal se répartissent en deux groupes ayant leur maximum de hauteur respectivement au quart (groupe A)

([49]) LEMAIRE, G., 1951.

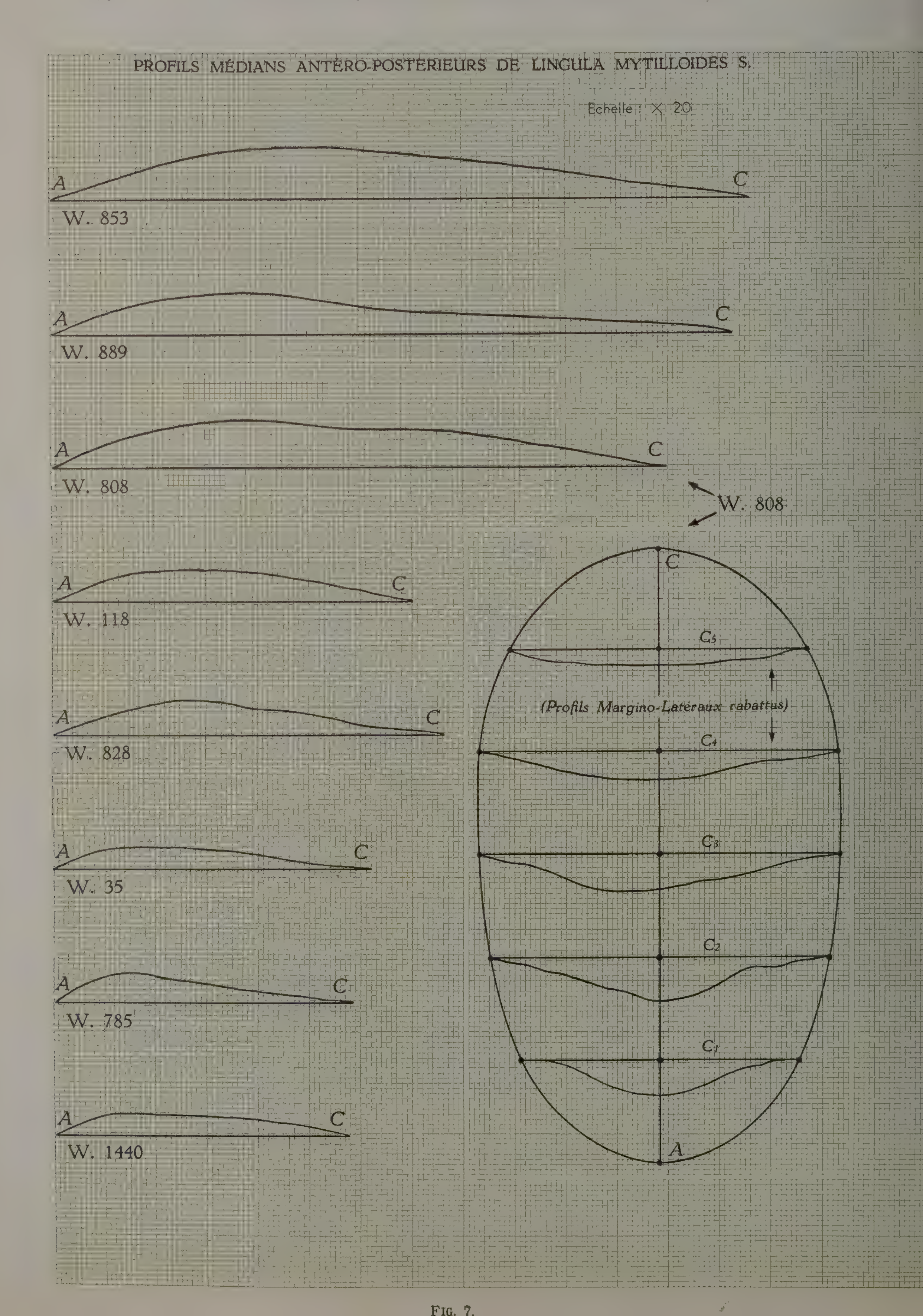

PROFILS MÉDIANS ANTÉRO-POSTÉRIEURS DE LINGULA MYTILLOIDES S.
Echelle : × 20
A
C
W. 853
A
C
W. 889
A
C
W. 808
W. 808
A
C
W. 118
A
C
W. 828
A
C
W. 35
A
C
W. 785
A
C
W. 1440
C
C_5
(Profils Margino-Latéraux rabattus)
C_4
C_3
C_2
C_1
A

Fig. 7.

et au tiers antérieur (groupe B). Une confirmation ultérieure de cette observation ferait penser à une différence morphologique entre valve ventrale et valve dorsale.

L'étude géométrique de la courbe du profil (prise dans le plan sagittal) des formes rattachées au premier groupe (A) (voir fig. 7, valves W. 889 et W. 785) permet les constatations suivantes :

a) Depuis l'umbo jusqu'aux deux tiers (environ) de la longueur du diamètre antéro-postérieur, la courbe est identifiable à une spirale logarithmique;

b) A partir du dernier tiers de la longueur du diamètre antéro-postérieur, la courbe tend à s'infléchir et paraît prendre une direction asymptotique, parallèle au diamètre antéro-postérieur.

Cette dernière partie de la courbe est située nettement au-dessus de l'arc de spirale logarithmique parfaite qui prolongerait la partie (antérieure) de la courbe.

La forme de cette courbe suggère deux interprétations quant à son origine.

Selon la première, cette forme résulterait d'une déformation mécanique se traduisant par un écrasement d'une courbe à courbure plus forte et de signe constant, c'est-à-dire sans inflexion. Cette courbe non déformée pourrait être une spirale parfaite.

Une seconde interprétation consiste à voir dans la divergence de plus en plus nette entre la spirale parfaite et une courbe plus étendue tendant à s'infléchir, l'effet de la croissance relative plus rapide du diamètre antéro-postérieur. Dans ce cas on observerait, en conchyliologie, une différenciation nette entre les profils de valves — ou de coquilles — dont le rebord libre reste, au cours de la croissance, semblable à lui-même, et les profils de valves — ou de coquilles — caractérisées par une variabilité de forme au cours de la croissance.

§ 6. MORPHOLOGIE DES VALVES.

La variabilité de la forme du rebord libre des valves aux stades néalogique, éphébolique et peut-être gératologique, jointe à la forme complexe du profil sagittal, n'a pas permis d'utiliser ces deux éléments essentiels pour une tentative de caractérisation géométrique du Brachiopode étudié ici par la méthode mise au point par M. L. Lison [50]. Rappelons que les études de ce chercheur sur la génération et le développement des coquilles de Lamellibranches l'avaient conduit à conclure à l'identification de leur surface à une *surface spirale logarithmique*.

L'émission d'une autre hypothèse géométrique pour la caractérisation des valves du Brachiopode étudié — que rien ne permet de croire être simple — et

---

([50]) Lison, L., 1949, pp. 15 et suiv.

sa vérification par des tests statistiques exigeraient les topogrammes de quelques dizaines de pièces. Outre le caractère particulièrement onéreux de pareils travaux, la sélection des pièces non déformées devant constituer l'échantillon serait dangereuse à la fois parce qu'il est difficile de définir objectivement ce qu'on doit considérer comme une valve intacte et parce que toute sélection est opposée au principe même de l'échantillonnage statistique.

Dans ces conditions il a paru préférable de limiter l'étude géométrique de la morphologie surfacielle aux données descriptives exposées aux §§ 1, 2 et 3 et à la présentation iconographique d'individus bien caractéristiques, tels ceux des figures 1 à 10 de la planche IV rangés par ordre de taille et choisis parmi les limites de la moyenne. La planche H présente un phototopogramme ou levé stéréophotogrammétrique d'une valve non déformée de *Lingula mytilloides*. Le document à une échelle de grandissement de × 60 présente les courbes de niveau à l'équidistance de 0,02 mm et permet une excellente appréciation du modelé. A partir de cette reproduction très fidèle et précise, il a été obtenu les profils principaux antéro-postérieurs et margino-latéraux présentés sur le même diptyque.

*
**

Au terme de cette étude, où ont été recherchés puis présentés les faits majeurs issus de l'examen conchyliométrique d'un Brachiopode, certains éléments observés, qui auraient pu concourir à la caractérisation du « type moyen de l'espèce », ont été laissés en suspens.

Ces lacunes dans l'appréciation synthétique des données biométriques et dans la variabilité de celles-ci pourront être comblées par l'examen d'autres *Lingula* et d'autres *Atremata*; la comparaison permettra d'établir la signification et les limitations des conclusions qu'on peut tirer des observations brutes.

Quoi qu'il en soit, nous sommes certains, à l'instar du paléontologiste M. D. NEWELL, que « la reconnaissance de ce qui est persistant, des différences cachées et des effectives identités, dans des populations séparées de fossiles, n'est seulement franchement démontrable que par des méthodes quantitatives ».

INDEX DES OUVRAGES CITÉS.

ASHWORTH, J. H., 1915, *On Larvæ of Lingula and Pelagodiscus (Discinisca)*. (Trans. Roy. Soc. Edinb., Edinburgh, vol. LI, 1914-1917, I-IV, part 1, n° 3, pp. 45-66, pl. IV and V.)

BEECHER, C. E., 1892, *Development of the Brachiopoda.* Part II. *Classification of the stages of Growth and Decline.* (Amer. J. Sci., New Haven, 3e sér., vol. 44, n° 260, 19, pp. 133-154, 1 pl.)

— 1901, *Development and Classification of Brachiopoda.* (In Studies in Evolution, Scribner's, New-York.)

BROOKS, W. K., 1879, *The Development of Lingula and the Systematic Position of the Brachiopoda.* (Chesapeake Zool. Lab. John Hopkins Univ., Scient. results of the Session of 1878, Baltimore, pp. 35-107, 6 pl.)

CHAUDOIR, H., ANCION, CH., PASTIELS, A., WILLIÈRE, Y., 1951, *Étude géologique du Bassin houiller de Liège. Le Massif de Herve. Région occidentale.* (Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles, Publ. n° 8, 66 p., 6 pl.)

CRAMER, H., 1946, *Mathematical methods of statistics.* (Princeton, Princeton Press, 1 vol., 575 p., 34 fig.)

CURRIE, E. D., DUNCAN, C. and MUIR-WOOD, H. M., 1937, *The fauna of Skipsey's Marine Band.* (Trans. geol. Soc. Glasg., Glasgow, vol. 19, part 3, n° 17, pp. 413-452.)

DALL, W. H., 1877, *Index to the names wich have been applied to the subdivisions of the class Brachiopoda.* (Bull. U. S. nat. Mus., Washington, n° 8, 88 p.)

D'ARCY WENTWORTH THOMPSON, 1942, *On Growth and Form.* (Cambridge, nouv. édit., 1 vol., 1116 p., 554 fig.)

DAVIDSON, T., 1854-1855, *Introduction à l'histoire naturelle des Brachiopodes vivants et fossiles.* (Traduc. franç. de E. DESLONGCHAMPS.) (Mém. Soc. linnn. Normandie, Paris, vol. 10, pp. 69-268, pl. VI-XIV.)

— 1858-1863, *A Monograph of the British Fossil Brachiopoda*, vol II. *Permian and Carboniferous species*, part IV. *The Permian Brachiopoda*, part V. *The Carboniferous Brachiopoda.* (Palæontogr. Soc., London, vol. II, part IV (1858), 51 p., 4 pl.; part V (1858-1863), 280 p., 55 pl.)

— 1880, *A Monograph of the British Fossil Brachiopoda*, vol. IV, part 3 ; *Supplement to the Permian and Carboniferous species.* (Palæontogr. Soc., London, vol. IV, part 3, pp. 243-315, pl. XXX-XXXVII.)

— 1860, *A Monograph of the Carboniferous Brachiopoda of Scotland.* (London, 76 p., 5 pl.)

— 1886-1888, *A Monograph of Recent Brachiopoda*, part 1, 2, 3. (Trans. Linn. Soc. Lond. Zool., London, sér. 2, vol. 4, 237 p., 30 pl.)

DAVIDSON, T. and DALTON, W. H., 1866, *A Monograph of the British Fossil Brachiopoda. Bibliography*, vol. 6. (Palæontogr. Soc. [Monogr.], London, 163 p.)

De Koninck, L. G., 1842-1854, *Description des animaux fossiles du terrain carbonifère de Belgique.* (H. Dessain, Liège, texte 631 p., atlas, 55 pl., supplément, pp. 631-714, pl. 55-60.)

Deleers, C. et Pastiels, A., 1947, *Étude biométrique des* Anthraconauta *du Houiller de la Belgique* (1re partie). (Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles, Public. n° 2, 93 p., 20 pl.)

Demanet, F., 1934, *Les Brachiopodes du Dinantien de la Belgique*, 1er volume : *Atremata, Neotremata, Protremata* (pars). (Mém. Mus. roy. Hist. nat. Belg., Bruxelles, n° 61, 116 p., 17 fig., 10 pl.)

— 1938, *La faune des couches de passage du Dinantien au Namurien dans le synclinorium de Dinant.* (Mém. Mus. roy. Hist. nat. Belg., Bruxelles, n° 84, 184 p., 39 fig., 14 pl.)

— 1941, *Faune et Stratigraphie de l'étage namurien de la Belgique.* (Mém. Mus. roy. Hist. nat. Belg., Bruxelles, n° 97, 298 p., 49 fig., 18 pl.)

— 1943, *Les horizons marins du Westphalien de la Belgique et leurs faunes.* (Mém. Mus. Hist. nat. Belg., Bruxelles, n° 101, 164 p., 9 pl.)

Dorsman, L., 1945, *The marine fauna of the Carboniferous in the Netherlands.* (Meded. Geol. Stichting, Maastricht, Ser. C-IV-3, n° 3, 101 p., 11 pl., 10 tabl., 3 fig.).

Fisher, R. A., 1948, *Statistical methods for research workers* (10th ed.). (Biolog. Monogr. and manuals, Edinburgh, n° V.)

Gratiolet, P., 1860, *Recherches pour servir à l'Histoire des Brachiopodes.* Deuxième monographie, *Études anatomiques sur la Lingule anatine.* (J. Conchyliol., Paris, Bernardi, 2e sér., t. 4, vol. 8, pp. 48-172, pl. VI-IX.)

Hall, J. and Clarke, J. M., 1892-1895, *An Introduction to the Study of the genera of Palæozoic Brachiopoda.* Part I. (Geol. Surv. State New York, Albany, Palæontology, vol. 8, 367 p., 43 pl. Repris in : Geol. Mag. Lond., London, Decade III, vol. 10, n° 345, pp. 130-133.)

Hancock, A., 1857, *On the Organisation of the Brachiopoda.* (Philos. Trans., London, vol. 148, pp. 791-852, pl. 52-66.)

Hoel, P. G., 1947, *Introduction to mathematical statistics.* (New York, John Wiley, 258 p.)

Huxley, J. S., 1924, *Constant differential Growth-ratios and their significance.* (Nature, London, vol. CXIV, pp. 895-896.)

— 1932, *Problems of relative Grouwth.* (London, Methuen, 265 p., 105 fig.)

Kendall, M. G., 1945-1946, *The advanced theory of statistics.* (London, Griffin, 2 vol.)

Kirby, J. W., 1860, *On the occurrence of Lingula Credneri Geinitz, in the Coal measures of Durham.* (Quart. J. geol. Soc. Lond., London, vol. 16, pp. 412-420.)

Lamotte, M., 1948, *Introduction à la biologie quantitative. Présentation et interprétation statistique des données numériques.* (Paris, Masson, 1 vol., 369 p., 83 fig.)

Lemaire, G., 1951, *La stéréophotogrammétrie au service de la restitution des objets de petites dimensions.* (Bull. Soc. belge Photogrammétrie, n° 24, 18 p., 8 fig.)

Linder, A., 1945, *Statistischer Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure.* (Lehrb. u. Monograph. Gebiete Exakten Naturwiss., Bale, n° 6, 150 p., 38 fig.)

Lison, L., 1949, *Recherches sur la forme et la mécanique de développement des coquilles des Lamellibranches.* (Mém. Inst. roy. Sci. nat. Belg., Bruxelles, 2e sér., fasc. 34, 87 p., 30 fig.)

MC'COY, F. R., 1844, *A Synopsys of the characters of the carboniferous limestone fossils of Ireland.* (University Press, Dublin, 206 p., 29 pl.)

MATHER, K., 1949, *Statistical analysis in Biology* (3e édit.). (London, Methuen, 267 p.)

MORICE, E., TISSERAND, M. et REBOUL, J., 1947, *Méthodes statistiques en Médecine et en Biologie.* (Paris, Masson, 174 p.)

NEWELL, N. D., 1949, *Types and Hypodigms.* (Amer. Journ. Sciences, Columbia, vol. 247, pp. 134-142.)

OEHLERT, D. P., 1887, in : FISCHER, P. « *Manuel de Conchyliologie* », supplément : *Brachiopodes.* (Paris, F. Savy, pp. 1189-1334, fig. 892-1138.)

PORTLOCK, J. E., 1843, *Report on the Geology of the country of Londonderry and of parts of Tyrone and Fernamandagh.* (Dublin, 770 p., 45 pl.)

RENIER, A., STOCKMANS, F., DEMANET, F. et VAN STRAELEN, V., 1938, *Flore et Faune houillères de la Belgique.* (Édit. Patrimoine Mus. roy. Hist. nat. Belg., Bruxelles, 2 vol., texte 302 p., 142 fig., atlas, 144 pl.)

SCHAEFFER, C., 1926, *Untersuchungen zur vergleichenden anatomie und histologie der Brachiopodengattung Lingula.* (Acta zool., Stockholm, vol. 7, pp. 329-398, 45 fig., 1 pl.)

SCHUCHERT, C., 1897, *A synopsys of american Fossil Brachiopoda.* (Bull. U. S. geol. Surv., Washington, n° 87, 464 p.)

— 1911, *Paleogeographic and geologic significance of recent Brachiopoda.* (Bull. geol. Soc. Amer., Rochester, New York, vol. 22, n° 2, pp. 258-275.)

SCHUCHERT, C. and LE VENE, C. M., 1929, *Fossilium Catalogus*, I. *Animalia*, Pars 42, *Brachiopoda.* (W. Junk, Berlin, 140 p.)

SEWELL, R. B. S., 1912, *Note on the Development of the larva of Lingula.* (Record of the Indian Museum, vol. 7, pp. 88-89.)

SIMPSON, G. G., 1940, *Types in Modern Taxonomy.* (Am. Jour. Sc., New-Haven, vol. 238, n° 6, pp. 413-431.)

— 1945, *The principles of Classification and a classification of Mammals.* (Bull. Amer. Museum nat. Hist. New-York, vol. 85, 349 p.)

SOWERBY, J., 1812, *The mineral Conchology of Great Britain, Descriptions*, vol. I-II. (London, B. Meredith, Texte, vol. I-II, 251 p., Atlas, 203 fig.)

TEISSIER, G., 1937, *Les lois quantitatives de la croissance.* (Actualités scientif. et industr., Paris, n° 455.)

WALCOTT, C., 1888, *A fossil Lingula preserving the cast of the peduncle.* (Proc. U. S. nat. Mus., Washington, vol. 11, p. 480, 3 fig.)

WEHRLI, H., 1931, *Die Fauna der Westfälischen stufen A und B der Bochumer Mulde zwischen Dortmund und Kamen (Westfalen).* (Palæontographica, Stuttgart, Bd. 74, ss. 94-128, 13 textfig., 3 tab., taf. XXI-XXIII und A-D.)

YATSU, N., 1901-1903, *On the Habits of the Japanese Lingula.* (Annot. zool. jap., Tokyo, vol. 4, pp. 61-68.)

— 1902, *On the Development of Lingula anatina.* (J. College Sci. Imper. Univ. Tokyo, Tokyo, vol. 17, art. 4, 112 p., 8 pl.)

YULE, U. and KENDALL, M. G., 1945, *An introduction to the theory of Statistics* (13e édit.). (London, Griffin, 570 p.)

LISTE DES PLANCHES HORS TEXTE.

LISTE DES TABLEAUX HORS TEXTE.



PLANCHE I

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

FIG. 1 à 3, 8 et 9. — *Lingula mytilloides* SOWERBY.

1. Fragment de valve, vu du côté intérieur; test corné, à l'aspect chagriné, diaclasé (×12).
2. Vue extérieure d'une valve à test organique conservé; réseau de diaclases subparallèles (×6).
3. Vue intérieure de l'empreinte d'une valve; fragmentation et émiettement d'un test corné (parcelles brillantes) au moment de la fossilisation (×11).

   Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de veine Lairesse.

   Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).

8. Vue générale de l'ornementation longitudinale (×10).
9. Même spécimen. Vue oblique de la face intérieure d'un fragment de test montrant la fine striation radiaire (×25).

   Provenance : Levant du Flénu, siège 27/28. Étage 705 m, toit de la 21e veine de Ghlin.

   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

FIG. 4 à 6. — *Lingula* sp.

4. Vue extérieure d'une valve à test partiellement conservé (×9).
   a) test organique à ornementation concentrique;
   b) moulage de la face intérieure du test, aspect lisse.
5. Vue extérieure d'un fragment de valve (×13).
   a) test organique, corné, à stries concentriques et diaclases;
   b) moulage de la face intérieure du test, aspect chagriné et ponctué.
6. Valve à test organique conservé; aspect lisse et mat du test; réseau de diaclases transverses (×7).

   Provenance : Aiseau-Presle, siège Panama. Étage 660 m, toit de veine Sainte-Barbe de Ransart.

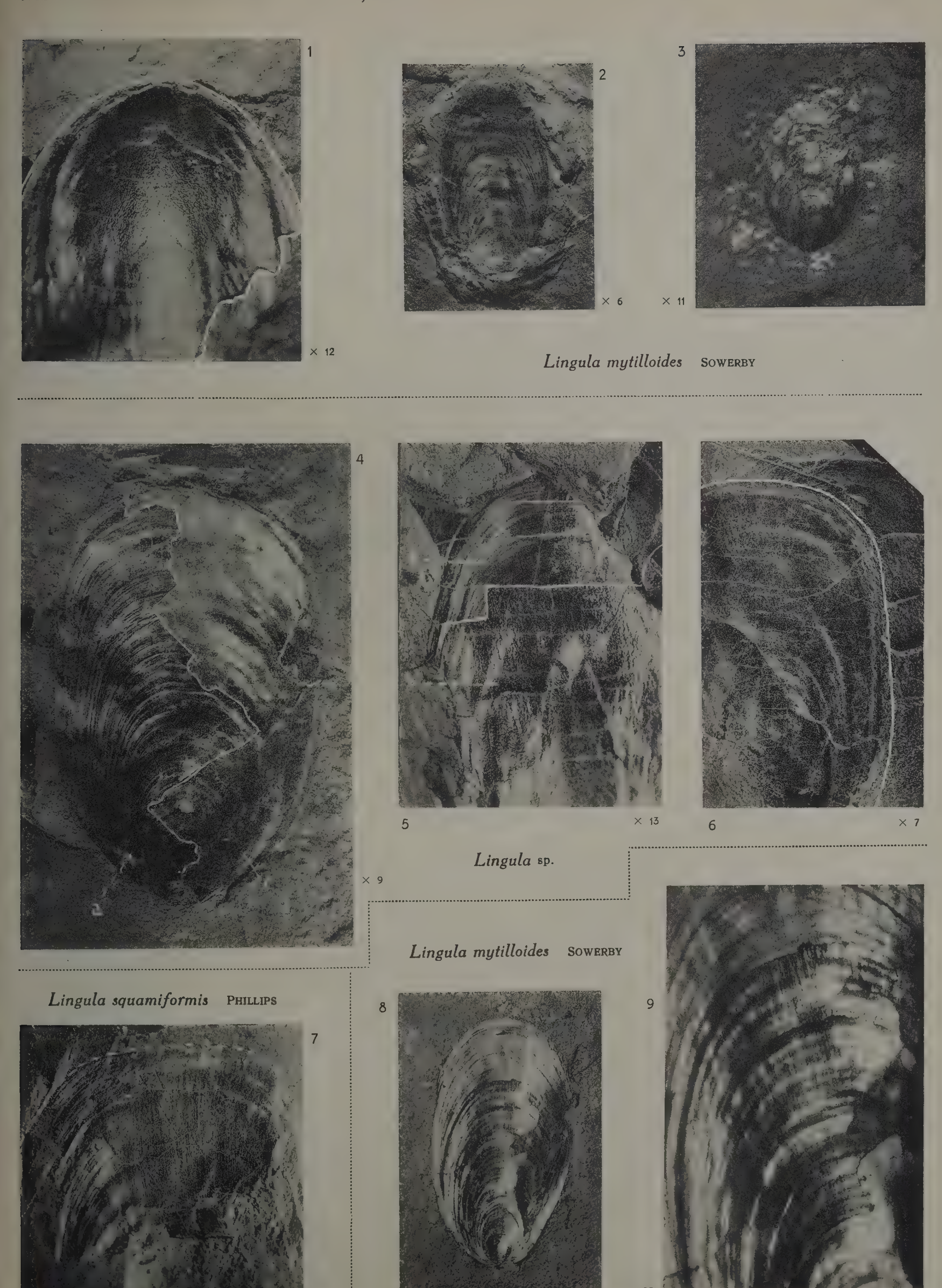
   Position stratigraphique : zone d'Oupeye (*Wn1a*).

FIG. 7. — *Lingula squamiformis* PHILLIPS.

Vue intérieure d'un fragment de test, région antérieure montrant les stries radiaires, très fines (×9).

Provenance : Aiseau-Presle, siège Panama. Étage 660 m, toit de veine Sainte-Barbe de Ransart.

Position stratigraphique : zone d'Oupeye (*Wn1a*).



Ch. DELEERS et A. PASTIELS. — Contribution à l'étude biométrique de *Lingula mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique.

Maison Ern. THILL, Bruxelles.

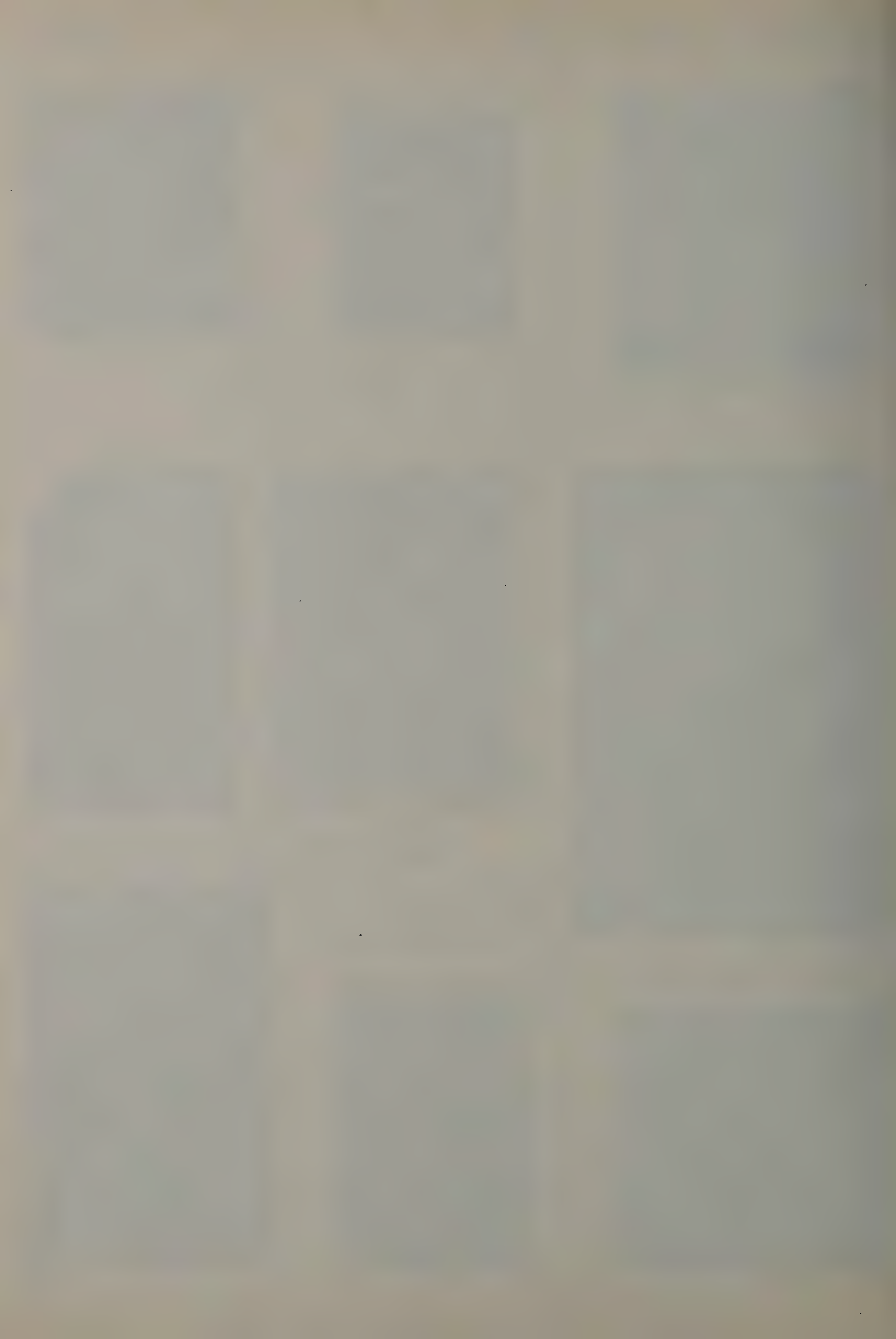




PLANCHE II

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

FIG. 1 à 11. — *Lingula mytilloides* SOWERBY.

1. Empreinte d'une valve épigénisée à la fossilisation, puis cariée ultérieurement (×8).
2. Empreinte d'un test, épigénisé par la calcite, puis carié par dissolution partielle du calcaire (×10).
3. Vue intérieure d'une empreinte d'une valve portant des formations épigénétiques calcareuses (×8).

   Provenance : Hensies-Pommeroeul, siège L. Lambert. Étage 840 m, toit de la 21e veine de Ghlin.

   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).
4. Vue intérieure d'une valve dorsale; plis microscopiques de la roche ayant affecté plastiquement la valve au cours de la fossilisation (×20).

   Provenance : Ressaix, puits n° 4. Étage 670 m, toit de la deuxième veinette sous veine Sainte-Marguerite.

   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).
5. Vue extérieure d'une valve déformée obliquement par rapport à l'axe antéro-postérieur et incurvée plastiquement autour d'un axe transversal (×6).

   Provenance : Aiseau-Presle, siège Panama. Étage 660 m, toit de veine Sainte-Barbe de Ransart.

   Position stratigraphique : zone d'Oupeye (*Wn1a*).
6. Valve, vue extérieure, apparaissant en fenêtre, au travers d'un *Aulacopteris* dont elle a épousé l'ornementation côtelée (×13).

   Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de veine Lairesse.

   Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).
7. Empreinte de la face extérieure d'une valve — plis microscopiques de la roche ayant affecté les bords marginaux de la valve (×11).

   Provenance : Aiseau-Presle, siège Panama. Étage 660 m, toit de veine Sainte-Barbe de Ransart.

   Position stratigraphique : zone d'Oupeye (*Wn1b*).
8. Empreinte d'une valve déformée par incurvation rentrante d'un bord marginal (×15).

   Provenance : Hensies-Pommeroeul, siège Sartys. Étage 601 m, toit de la 21e veine de Ghlin.

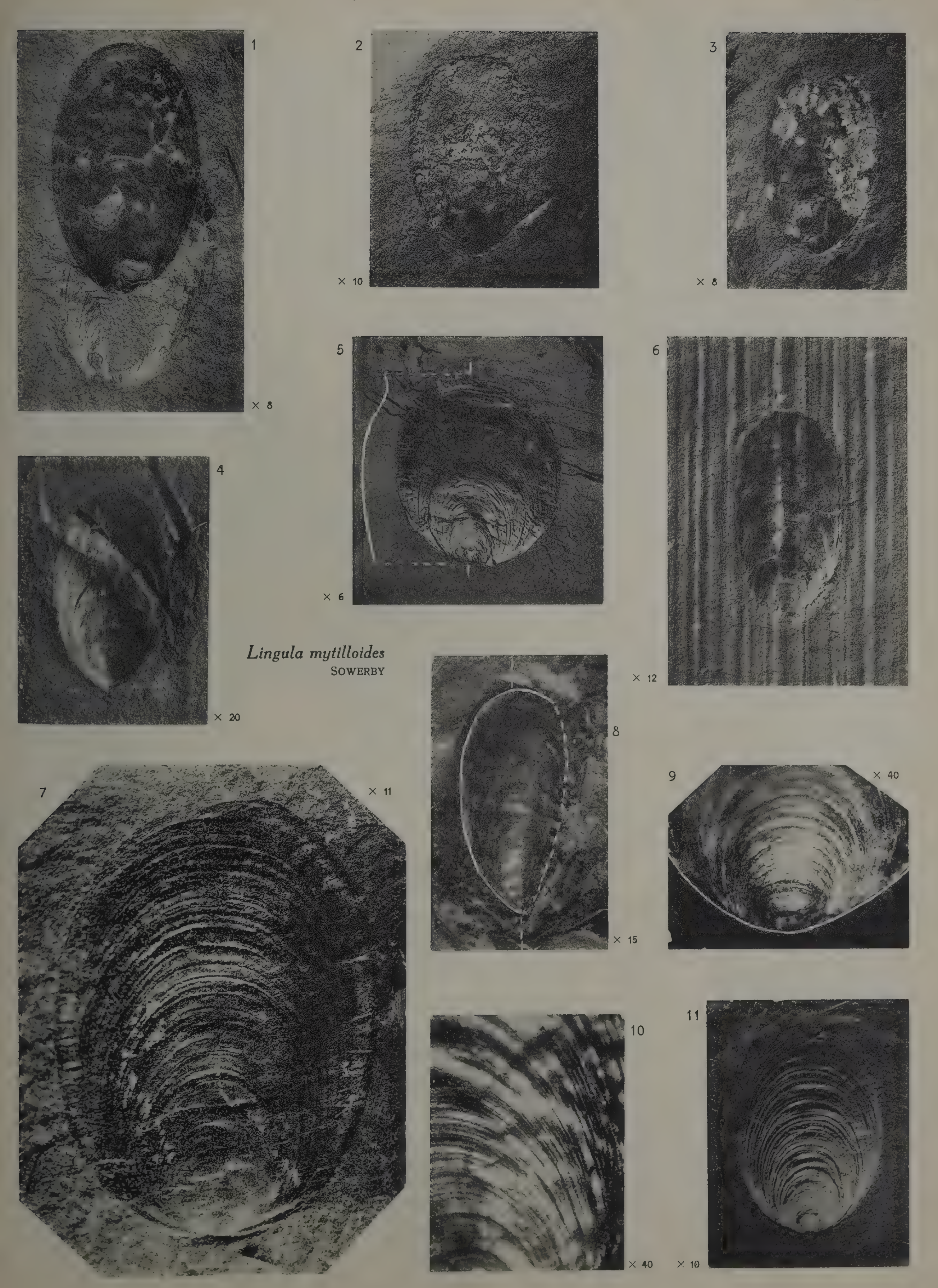
   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).
9. Empreinte de la face extérieure du test corné.
   Région cardinale montrant une très fine striation concentrique de rayon antéro-postérieur croissant depuis l'umbo (×40).
10. Fragment de valve — empreinte de la face extérieure du test corné —; fines stries concentriques (×40).

    Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de veine Lairesse.

    Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).
11. Face extérieure d'une valve, montrant l'ornementation concentrique; légères côtes dues à l'aplatissement de la valve (×10).

    Provenance : Aiseau-Presle, siège Panama. Étage 660 m, toit de veine Sainte-Barbe de Ransart.

    Position stratigraphique : zone d'Oupeye (*Wn1a*).



Lingula mytilloides SOWERBY

Ch. DELEERS et A. PASTIELS. — Contribution à l'étude biométrique de *Lingula mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique.

Maison Ern. THILL, Bruxelles.

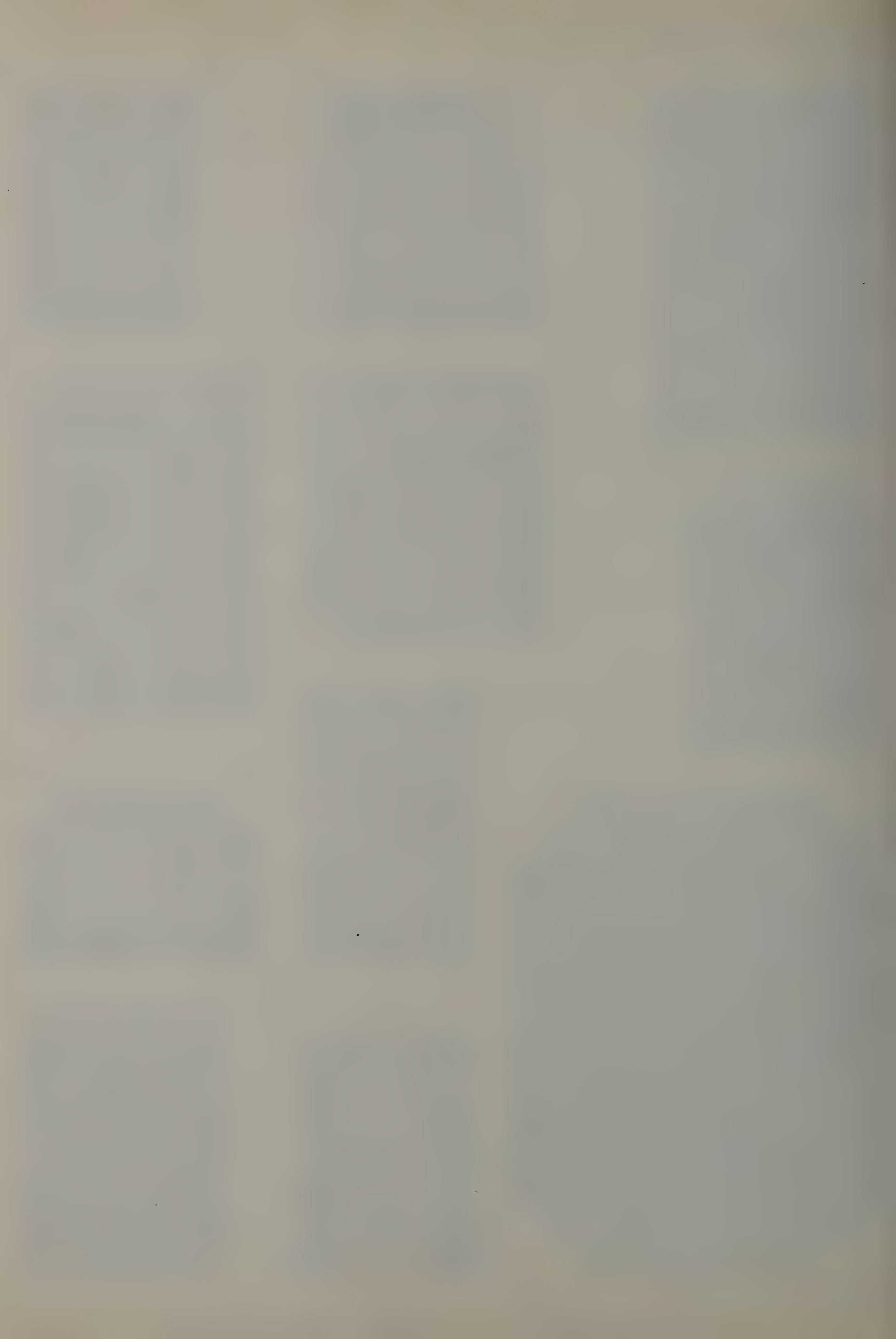


PLANCHE III

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

FIG. 1 à 14. — *Lingula mytilloides* SOWERBY.

1. Empreinte de la face extérieure du test corné; dans la région cardinale une très fine striation concentrique de rayon postéro-antérieur croissant depuis l'umbo (×40).

2. Vue intérieure d'une valve montrant la trace d'un épizoote vermiculiforme (×14).

3. Vue de face extérieure d'une valve écrasée montrant la formation de côtes qui affectent plusieurs lignes d'accroissement (×18).

   Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de veine Lairesse.
   Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).

4. Valve ventrale. Empreinte de la face extérieure; plis médians de dessiccation, en V (×32).

5. Fragment de valve ventrale (?). Empreinte de la face extérieure; plis médians de dessiccation, en V (×12.)

   Provenance : Ressaix, puits n° 4. Étage 670 m, toit de deuxième veinette sous veine Sainte-Marguerite.
   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

6. Valve ventrale. Empreinte de la face intérieure, en vue oblique. Ébauche de deux plis de dessiccation dans la région cardinale (×25).

   Provenance : Bois-du-Luc, siège Le Quesnoy. Étage 440 m, toit d'une veinette.
   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

7. Empreinte de valves appariées (×17).

   a) valve ventrale,
   b) valve dorsale.

8. Valve dorsale. Empreinte de la face intérieure, en vue oblique, région cardinale (×60).

9. Valve dorsale. Empreinte de la face extérieure, région cardinale (×40).

   Provenance : Ressaix, puits n° 4. Étage 670 m, toit de deuxième veinette sous veine Sainte-Marguerite.
   Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

10. Empreinte de valves appariées (×15).

    a) valve ventrale,
    b) valve dorsale.

    Provenance : Bernissart, siège Harchies. Étage 480 m, toit de la 21e veine de Ghlin.
    Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

11. Valve ventrale. Empreinte de la face intérieure; plis de dessiccation et déchirement du crochet (×30).

12. Valve ventrale. Empreinte de la face intérieure, vue oblique de la région cardinale; canal pédonculaire rétréci; bords de la région postérieure retroussés (×33).

    Provenance : Ressaix, puits n° 4. Étage 670 m, toit de deuxième veinette sous veine Sainte-Marguerite.
    Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

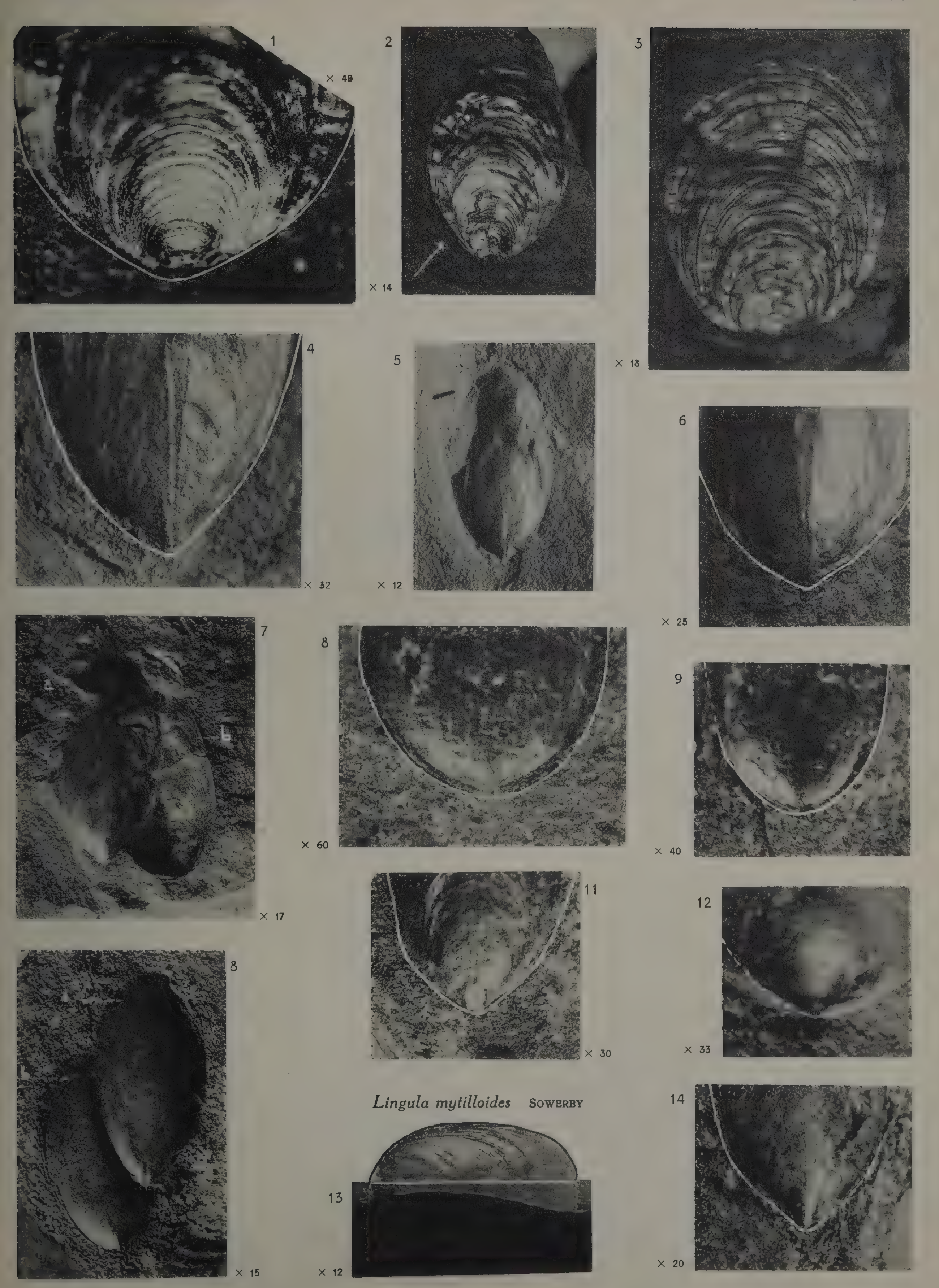
13. Empreinte d'une demi-valve, face extérieure (×12).

    a) en vue polaire,
    b) profil suivant l'axe de croissance maximum.

    Provenance : Hensies-Pommeroeul, siège Sartys. Étage 601 m, toit de la 21e veine de Ghlin.
    Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).

14. Valve ventrale. Contre empreinte de la face intérieure, vue oblique de la région cardinale; umbo rétréci (×20).

    Provenance : Ressaix, puits n° 4. Étage 670 m, toit de deuxième veinette sous veine Sainte-Marguerite.
    Position stratigraphique : zone d'Asch (*Wn2a*).



Ch. DELEERS et A. PASTIELS. — Contribution à l'étude biométrique de *Lingula mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique.

Maison Ern. THILL, Bruxelles.

PLANCHE IV

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

FIG. 1 à 10. — *Lingula mytilloides* SOWERBY.

Série d'individus peu ou pas déformés, rangés par taille décroissante.

Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de la veine Lairesse.

Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).

FIG. 11 à 15. — *Lingula anatina* BRUGUIÈRE.

11. *a*) valve ventrale présentant le canal pédonculaire de l'umbo rétréci par dessiccation et devenu plus acuminé (×4),

b) valve dorsale.

12. Valve ventrale présentant un léger pincement de l'umbo (×0,9).

Provenance : Nouvelle-Calédonie.

13. Valve ventrale ayant subi une dessiccation prolongée; formation de deux plis médians longitudinaux, en V; région de l'umbo fendue (×2).

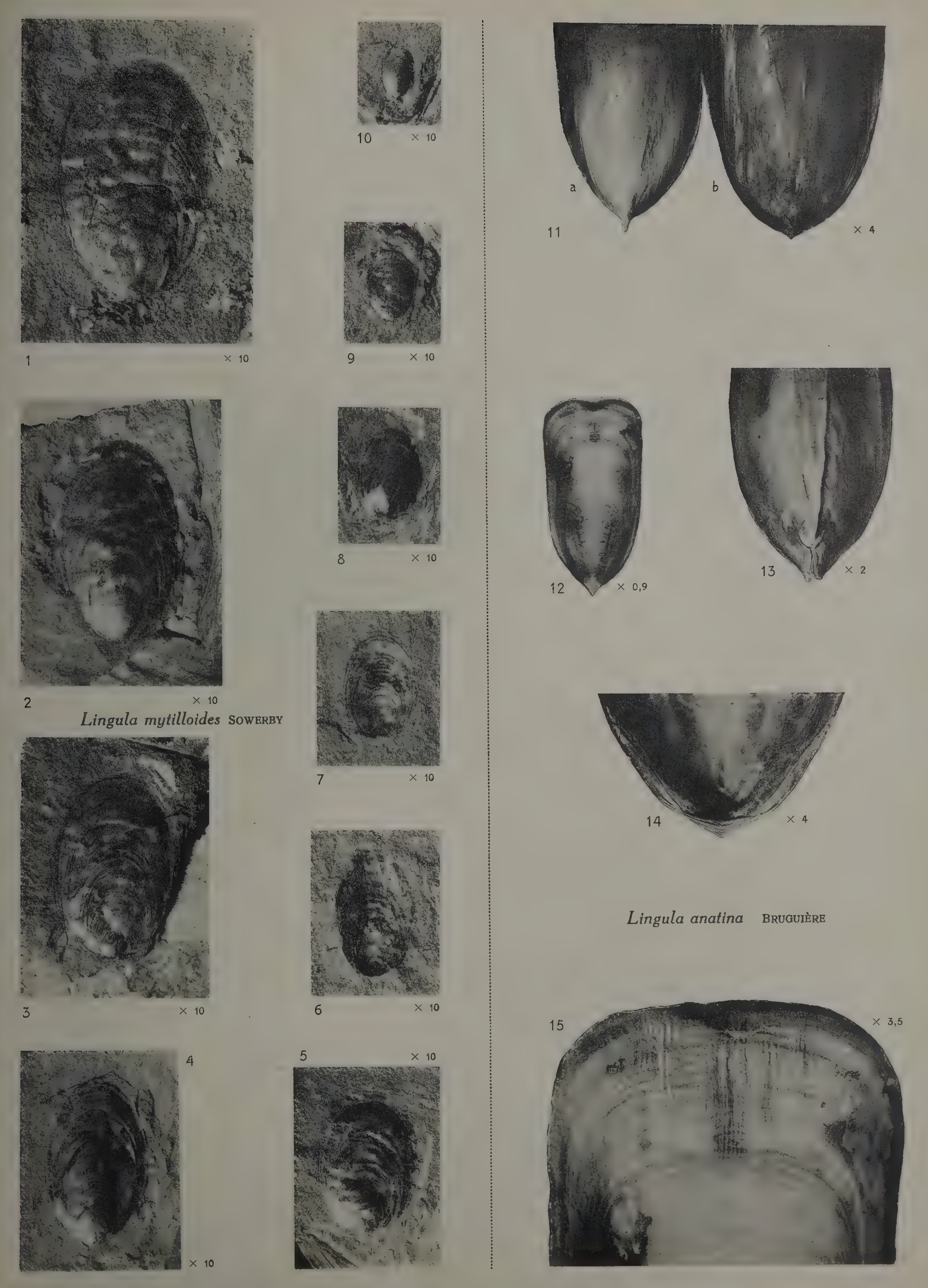
Provenance : Localité inconnue.

14. Valve dorsale, face intérieure; aire ligamentaire (×4).

Provenance : Otojima, Bitchu (Japon).

15. Valve ventrale montrant les stries longitudinales dans la région antérieure (×3,5).

Provenance : Nouvelle-Calédonie.



Lingula mytilloides SOWERBY

Lingula anatina BRUGUIÈRE

Ch. DELEERS et A. PASTIELS. — Contribution à l'étude biométrique de *Lingula mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique.

Maison Ern. THILL, Bruxelles.



PLANCHE V

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

Lingula mytilloides SOWERBY.

Valve déformée par aplatissement; formation de côtes.

Provenance : Wérister, siège Homvent. Étage 587 m, toit de veine Lairesse.

Position stratigraphique : zone de Beyne (*Wn1b*).



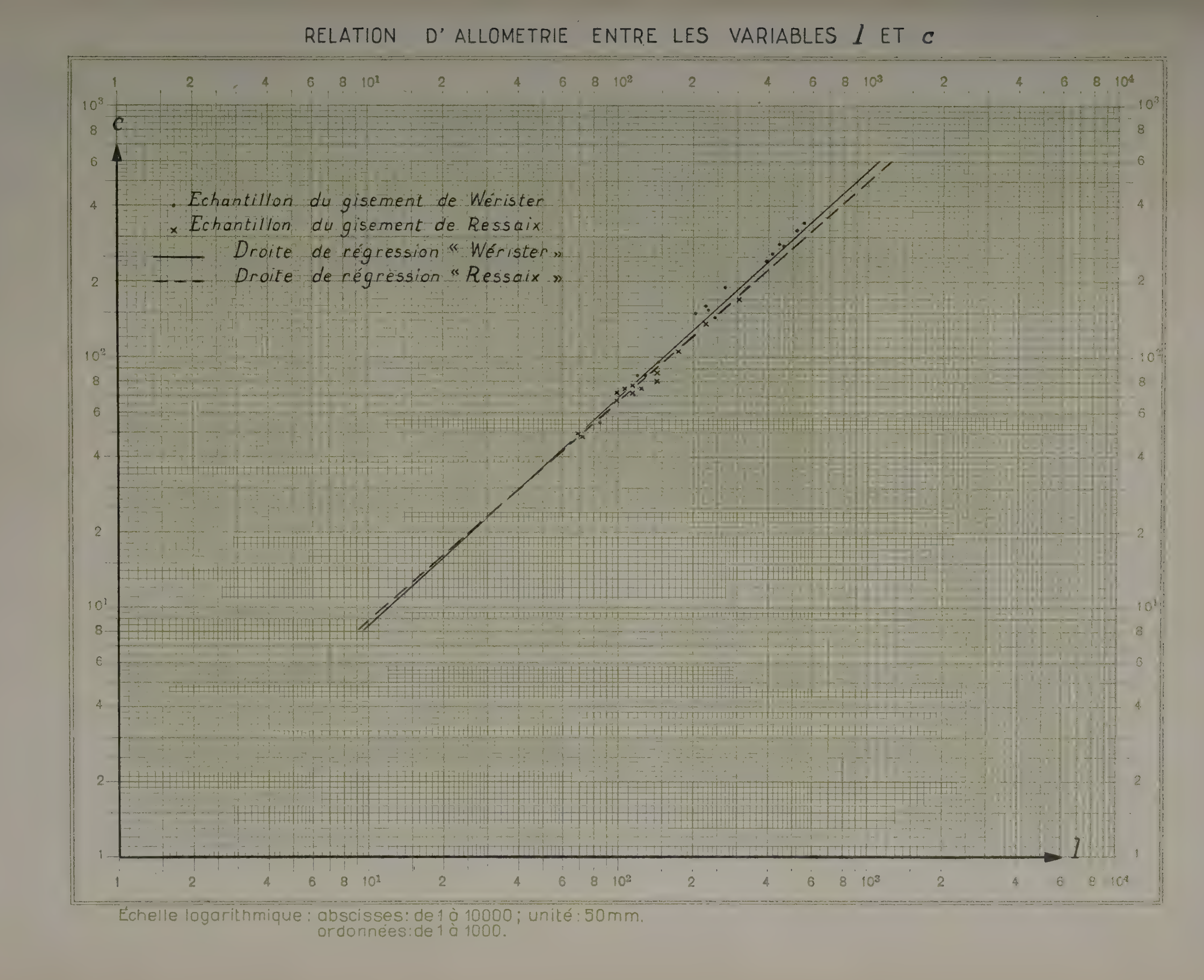
Lingula mytilloides SOWERBY
(× 57)

Ch. DELEERS et A. PASTIELS. — Contribution à l'étude biométrique
de *Lingula mytilloides* SOWERBY du Westphalien de la Belgique.

Maison Ern. THILL, Bruxelles.

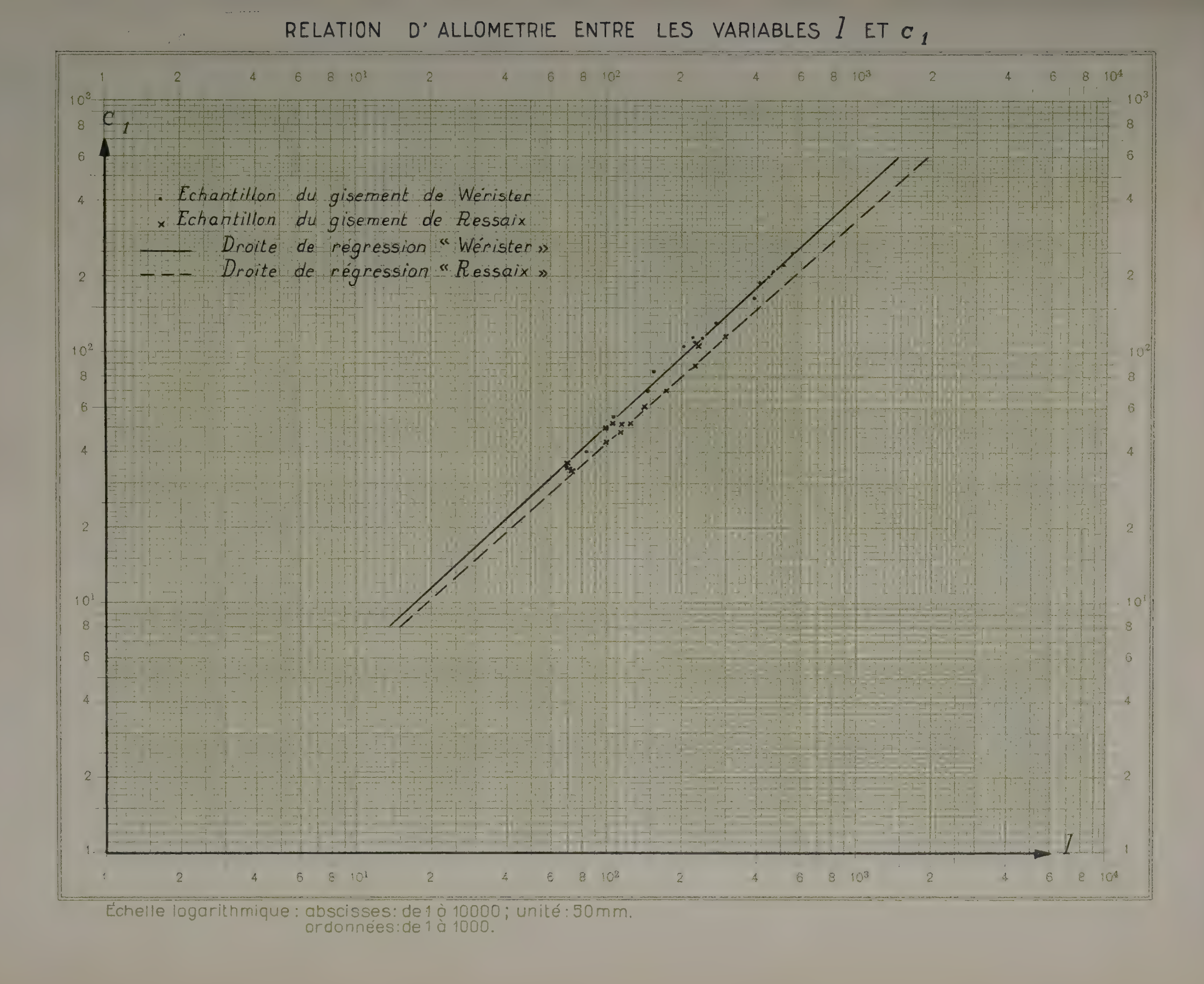


RELATION D'ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c

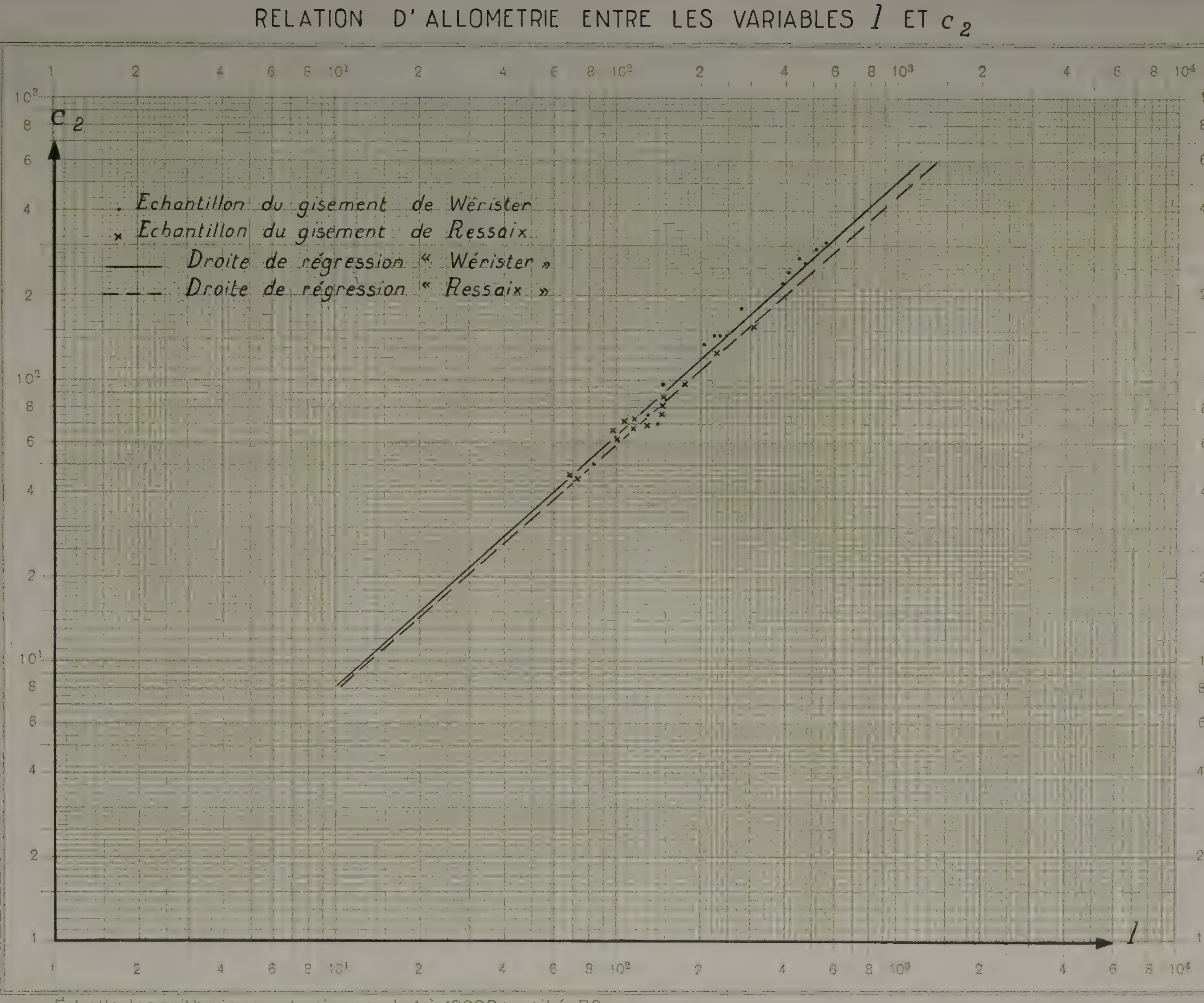


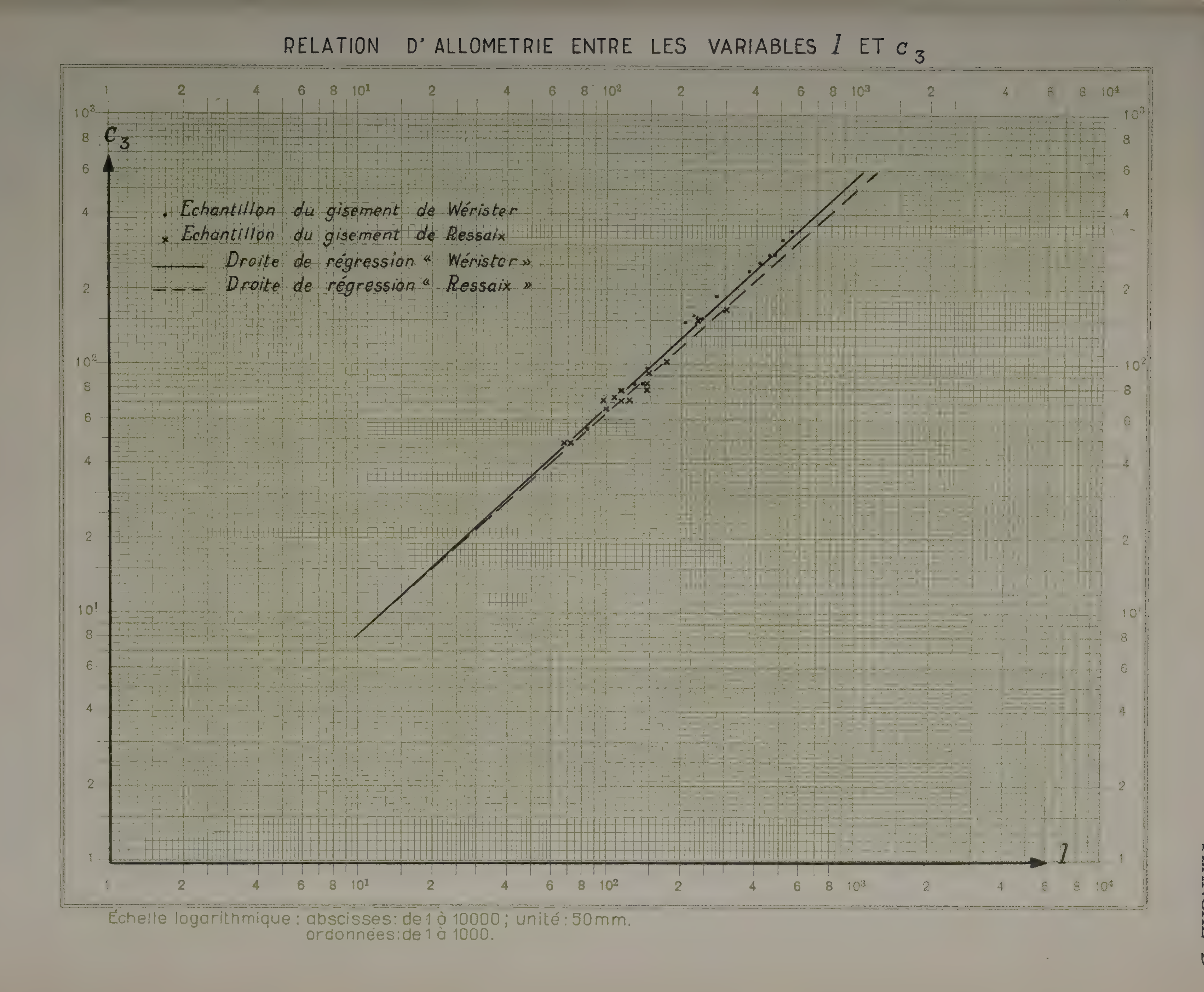
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50mm.
ordonnées: de 1 à 1000.

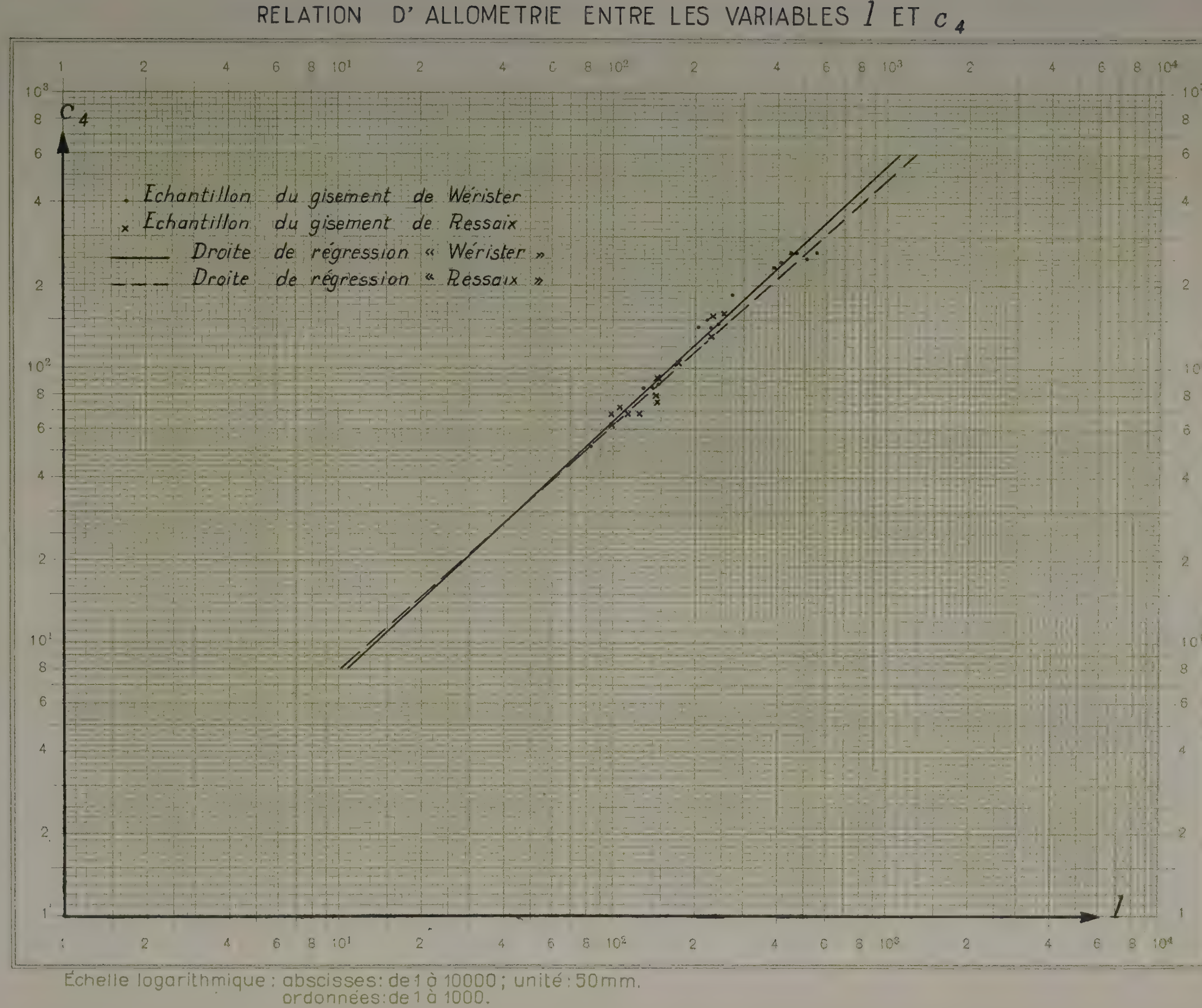
RELATION D'ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c_1

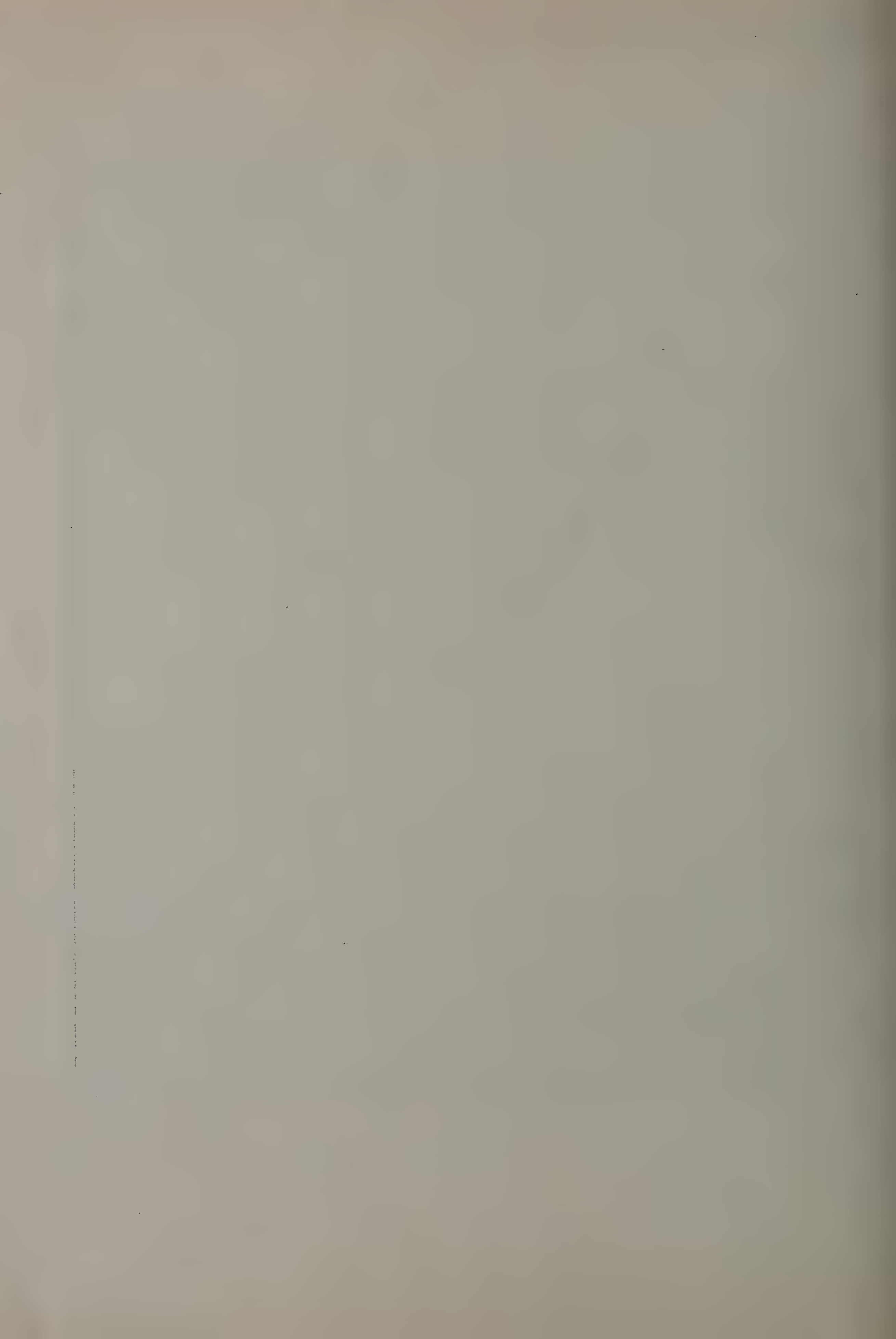


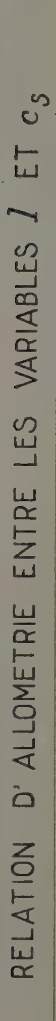
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50 mm.
ordonnées: de 1 à 1000.


RELATION D'ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c 2
c 2
l
• Echantillon du gisement de Wérister
× Echantillon du gisement de Ressaix
Droite de régression « Wérister »
Droite de régression « Ressaix »
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50 mm.
ordonnées: de 1 à 1000.


RELATION D'ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c3
c3
l
• Echantillon du gisement de Wérister
× Echantillon du gisement de Ressaix
Droite de régression « Wérister »
Droite de régression « Ressaix »
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50 mm.
ordonnées: de 1 à 1000.

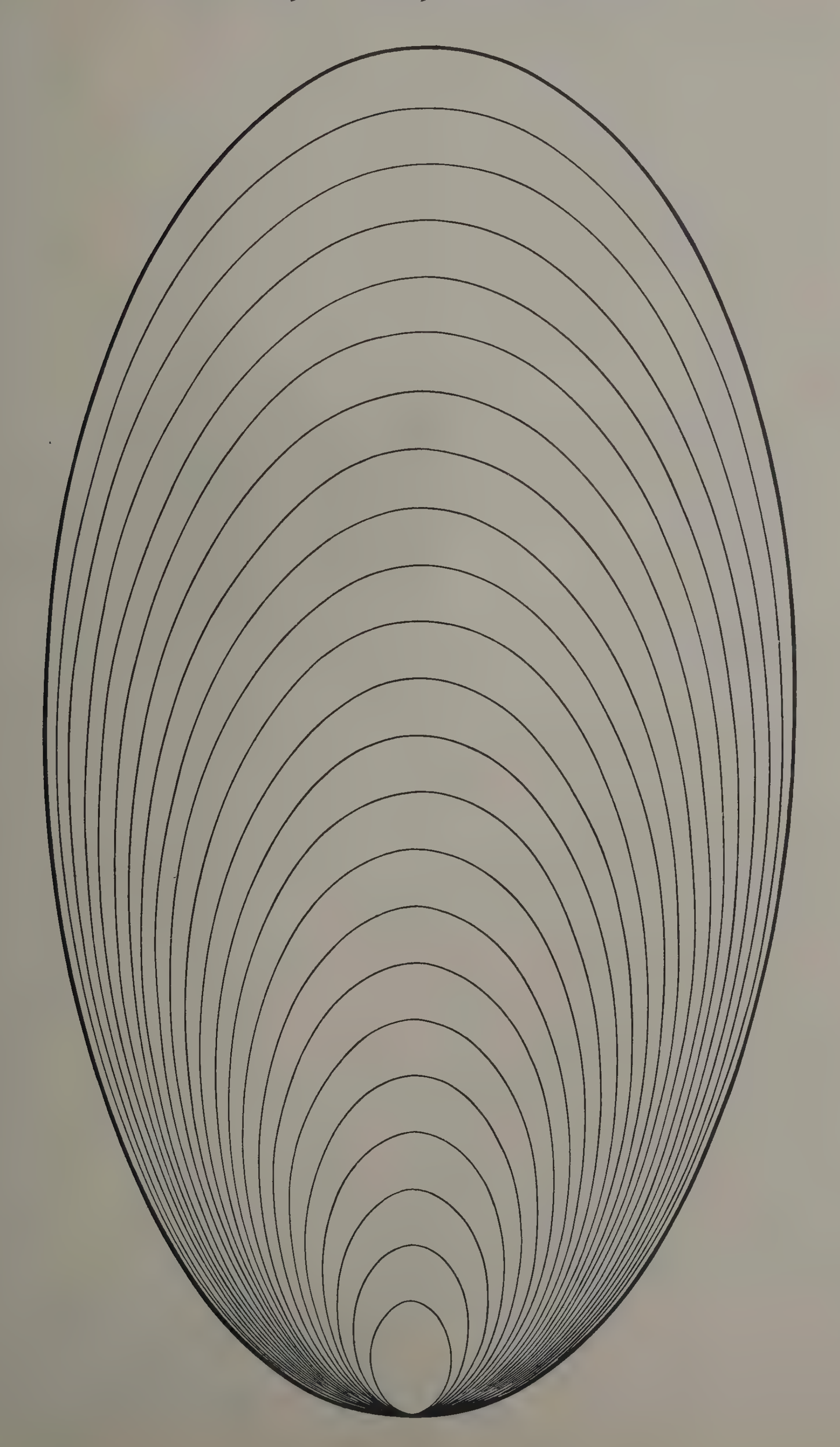

RELATION D' ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c 4
c 4
• Echantillon du gisement de Wérister
× Echantillon du gisement de Ressaix
Droite de régression « Wérister »
Droite de régression « Ressaix »
l
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50 mm.
ordonnées: de 1 à 1000.




RELATION D' ALLOMETRIE ENTRE LES VARIABLES l ET c_s
• Echantillon du gisement de Wérister
× Echantillon du gisement de Ressaix
—— Droite de régression « Wérister »
— — Droite de régression « Ressaix »
c_s
l
Échelle logarithmique : abscisses: de 1 à 10000 ; unité : 50 mm.
ordonnées: de 1 à 1000.

LINGULA MYTILLOIDES Sowerby.

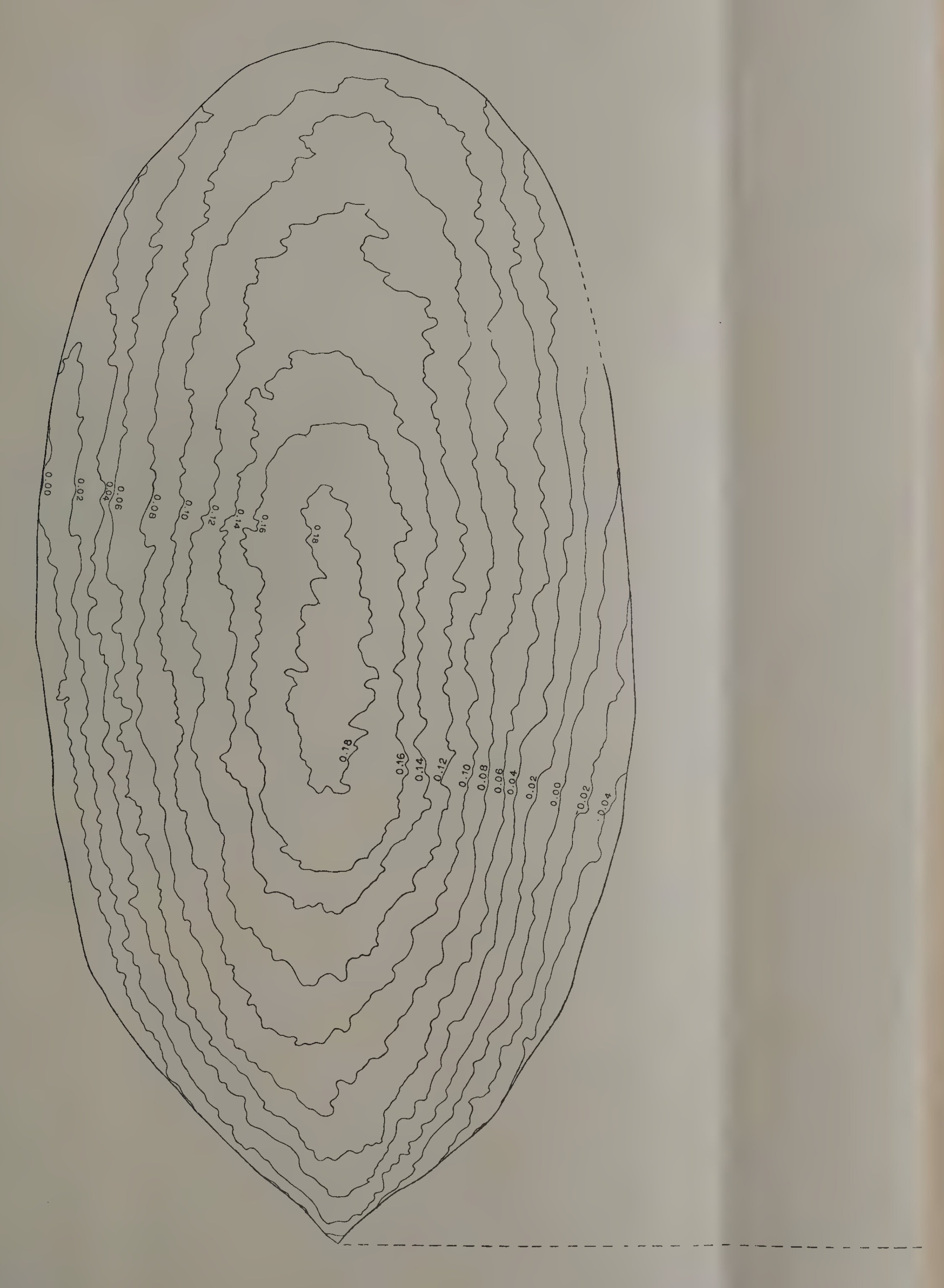
« Modèle statistique » calculé à partir des relations d'allométrie.



Echelle : X 34

LINGULA MYTILLOIDES Sowerby.

Stéréophotogramme.

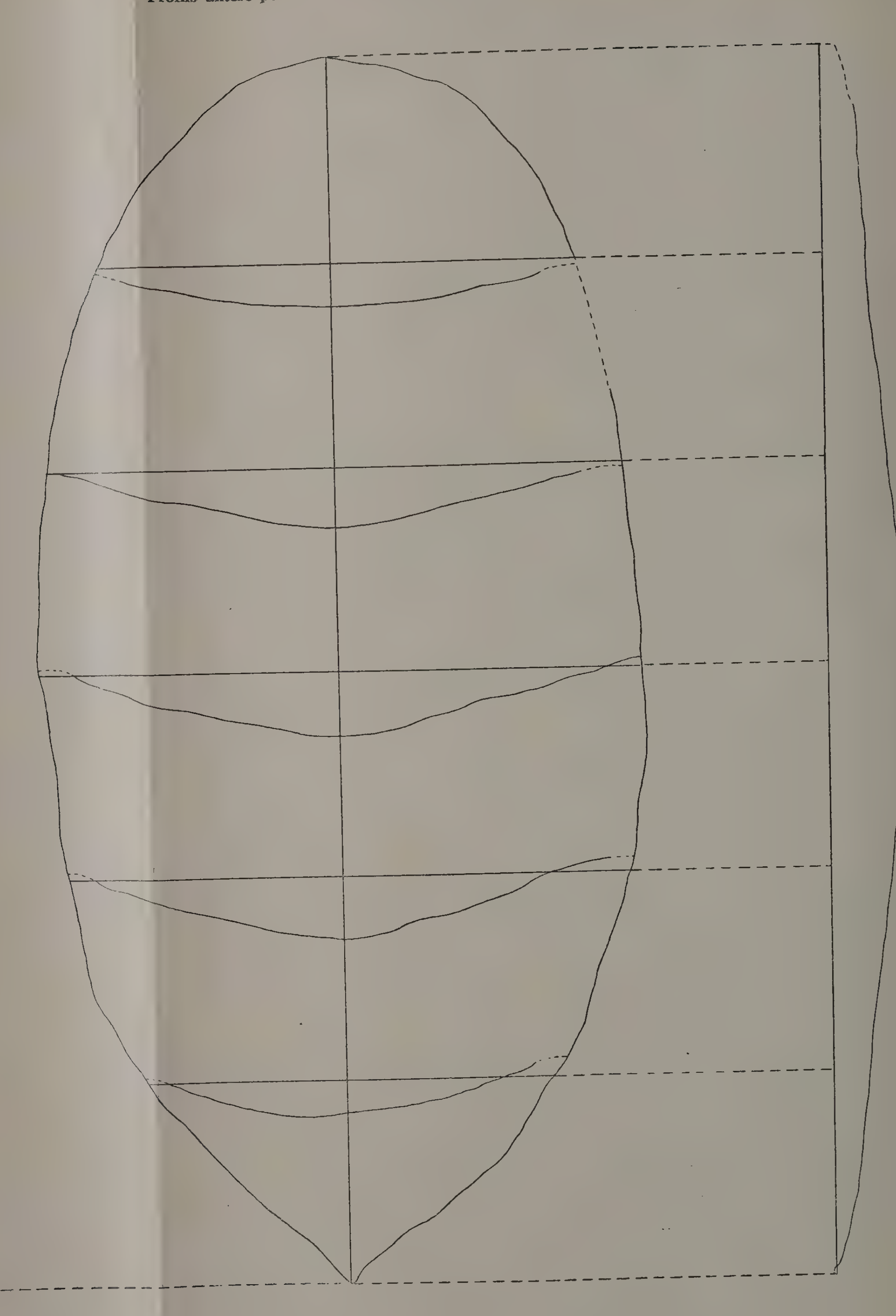


Échelle : ×60

Équidistance des courbes de niveau : 0,02 mm.

Restitution de l'Institut Géographique Militaire, Bruxelles.

Profils antéro-postérieurs et margino-latéraux.



TEST DE SIGNIFICATION DE L'INF

Données des calculs des va

N° de référence		Diamètre antéro-postérieur l			Diamètre margino-latéral c			Corde transversale c_1		
Couples de valves										
non formées	déformées	log l'	log l''	d	log c'	log c''	d	log c'_1	log c''_1	
497	574	2,58883173	2,61278386	—0,02395213	2,38201704	2,39794001	—0,01592297	2,24303805	2,26007139	—0
549′	628	2,48429984	2,50650503	—0,02220519	2,29003461	2,34242268	—0,05238807	2,17609126	2,21748394	—0
446	321	2,49968708	2,47712125	+0,02256583	2,28555731	2,25767857	+0,02787874	2,14612804	2,10720997	+0,
566	911	2,69108149	2,69284692	—0,00176543	2,47712125	2,46239800	+0,01472325	2,34242268	2,34830486	—0,
4	729	2,65127801	2,66275783	—0,01147982	2,43933269	2,42488164	+0,01445105	2,30103	2,26481782	+0,
518	1.239	2,23044892	2,23299611	—0,00254719	2,06445799	2,04532298	+0,01913501	1,90848502	1,96848295	—0
143	305′	2,17026172	2,0	+0,17026172	1,98227123	1,90848502	+0,07378621	1,84509804	1,70757018	+0,
552	652	2,23804610	2,23804610	0	2,07188201	2,06069784	+0,01118417	1,90848502	1,86332286	+0
315	922	2,39794001	2,30749604	+0,09044397	2,19033170	2,14612804	+0,04420366	2,01283722	2,0	+0
92	700	2,37657696	2,40823997	—0,03166301	2,22271647	2,22010809	+0,00260838	2,11394335	2,08278537	+0
545	337	2,48572143	2,49968708	—0,01396565	2,27184161	2.28555731	—0,01371570	2,24551267	2,16435286	+0
5	1.013	2,49276039	2,51851394	—0,02575355	2,29666519	2,28555731	+0,01110788	2,17026172	2,11727130	+0
1.063	975	2,52891670	2,54777471	—0,01885801	2,34439227	2,37106786	—0,02667559	2,22010809	2,22530928	—0
626	1.042	2,59106461	2,51321760	+0,07784701	2,39794001	2,35793485	+0,04000516	2,30319606	2,21748394	+0
50	788	2,62324929	2,61489722	+0,00835207	2,48429984	2,39445168	+0,08984816	2,26007139	2,26717173	—0
85	717	2,64345268	2,70757018	—0,06411750	2,45484486	2,42488164	+0,02996322	2,32221929	2,0	+0
808	693	2,78604121	2,79934055	—0,01329934	2,55630250	2,55266822	+0,00363428	2,39093511	2,43296929	—0

Valeur expérimentale de t

$$t = \frac{\bar{d}}{s}\sqrt{n}$$

Seuils de signification

$t_0\ (0{,}05) = 2{,}120$

$t_0\ (0{,}01) = 2{,}921$

pour $\nu = 16$

Diamètre antéro-postérieur l

$\Sigma\, d = 0{,}13986378$

$\bar{d} = 0{,}00822728$

$\Sigma\, d^2 = 0{,}0515208436228504$

$\frac{1}{n}(\Sigma\, d)^2 = 0{,}0011506984799184$

$(n-1)\, s^2 = 0{,}0503701451429320$

$s = 0{,}05610824$

$t = 0{,}605$

Conclusion :

Valeur non significative d'une différence systématique

Diamètre margino-latéral c

$\Sigma\, d = 0{,}27382684$

$\bar{d} = 0{,}01610746$

$\Sigma\, d^2 = 0{,}0237044879410020$

$\frac{1}{n}(\Sigma\, d)^2 = 0{,}0044106548722264$

$(n-1)\, s^2 = 0{,}0192938330687756$

$s = 0{,}03472556$

$t = 1{,}913$

Conclusion :

Valeur non significative d'une différence systématique

Corde transversale c_1

$\Sigma\, d = 0{,}66525527$

$\bar{d} = 0{,}03913266$

$\Sigma\, d^2 = 0{,}1529640025627217$

$\frac{1}{n}(\Sigma\, d)^2 = 0{,}0260332082941182$

$(n-1)\, s^2 = 0{,}1269307955379114$

$s = 0{,}08906837$

$t = 1{,}812$

Conclusion :

Valeur non significative d'une di
systématique

TABLEAU I.

IENCE DES DÉFORMATIONS.

urs expérimentales t.

	Corde transversale c_2			Corde transversale c_3			Corde transversale c_4		
d	$\log c'_2$	$\log c''_2$	d	$\log c'_3$	$\log c''_3$	d	$\log c'_4$	$\log c''_4$	d
1703334	2,34830486	2,37291200	—0,02460714	2,38201704	2,39794001	—0,01592297	2,35410844	2,36172784	—0,00761940
4139268	2,26717173	2,32837960	—0,06120787	2,29003461	2,34242268	—0,05238807	2,26717173	2,30535137	—0,03817964
3891807	2,24551267	2,23299611	+0,01251656	2,28555731	2,25767857	+0,02787874	2,25527251	2,22530928	+0,02996323
0588218	2,44090908	2,43296929	+0,00793979	2,47421626	2,46239800	+0,01181826	2,44715803	2,44404480	+0,00311323
3621218	2,41830129	2,39093511	+0,02736618	2,44247977	2,42488164	+0,01759813	2,41830129	2,40654018	+0,01176111
5999793	2,03742650	2,04532298	—0,00789648	2,06445792	2,04532298	+0,01913501	2,03342376	1,99122608	+0,04219768
3752786	1,96848295	1,85125835	+0,11722460	1,98677173	1,90308999	+0,08368174	1,94448267	1,90308999	+0,04139268
4516216	2,02938378	2,00432137	+0,02506241	2,07188201	2,06069784	+0,01118417	2,04532298	2,04921802	—0,00389504
1283722	2,14921911	2,11394335	+0,03527576	2,19033170	2,14612804	+0,04420366	2,14612804	2,12385164	+0,02227640
3115798	2,18469143	2,19312460	—0,00843317	2,22010809	2,21748394	—0,00262415	2,18469143	2,18752072	—0,00282929
8115981	2,23299611	2,26951294	—0,03651683	2,26951294	2,28103337	—0,01152043	2,23044892	2,24303805	—0,01258913
5299042	2,27415785	2,25527251	+0,01888534	2,29666519	2,28555731	+0,01110788	2,26245109	2,26717173	—0,00472064
0520119	2,31175386	2,33845649	—0,02670263	2,34439227	2,37106786	—0,02667559	2,32837960	2,33845649	—0,01007689
8571212	2,38021124	2,32221929	+0,05799195	2,39794001	2,35793485	+0,04000516	2,36735592	2,34242268	+0,02493324
0710034	2,39269695	2,37291200	+0,01978495	2,42488164	2,39445168	+0,03042996	2,39794001	2,38021124	+0,01772877
2221929	2,43136376	2,42488164	+0,00648212	2,45484486	2,42488164	+0,02996322	2,42651126	2,40993312	—0,01657814
4203418	2,51851394	2,52891670	—0,01040276	2,55145000	2,55266822	—0,00121822	2,55022835	2,53402611	+0,01620224

	Corde transversale c_2	Corde transversale c_3	Corde transversale c_4
	Σd = 0,15276278	Σd = 0,21665650	Σd = 0,14623669
	$\bar{d}$ = 0,00898605	$\bar{d}$ = 0,01274450	$\bar{d}$ = 0,00860216
	Σd^2 = 0,0273760214682700	Σd^2 = 0,0180727243534840	Σd^2 = 0,0083306009965443
	$\frac{1}{n}(\Sigma d)^2$ = 0,0013727339792190	$\frac{1}{n}(\Sigma d)^2$ = 0,0027611787642500	$\frac{1}{n}(\Sigma d)^2$ = 0,0012579514052504
	$(n-1)s^2$ = 0,0260032874890510	$(n-1)s^2$ = 0,0153115455892340	$(n-1)s^2$ = 0,0070726495912939
	s = 0,04031376	s = 0,03093495	s = 0,02102476
	t = 0,919	t = 1,699	t = 1,687
férence	*Conclusion :* Valeur non significative d'une différence systématique	*Conclusion :* Valeur non significative d'une différence systématique	*Conclusion :* Valeur non significative d'une différence systématique

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles. — Public. N° 12, 1952.

TABLEAU II

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

GISEMENT DE WÉRISTER.

Données des calculs : Logarithmes des mesures du diamètre margino-latéral (c) et des cordes transversales (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5), effectuées sur 50 valves, classées suivant les valeurs croissantes du logarithme de la mesure du diamètre antéro-postérieur l.

Intervalles log l et valeur centrale	Référ. des pièces	j	n_j	$X_j - \overline{X}$	log c	log c_1	log c_2	log c_3	log c_4	log c_5
1,85-1.9499 (1,90)	146	1	1	—0,592	1,74818803	1,60205999	1,70757018	1,74818803	1,71600334	1,61278386
1,95-2,0499 (2,00)	510	2	1	—0,492	1,90308999	1,76342799	1,87506126	1,90308999	1,86923172	1,77815125
2,05-2,1499	160	3	2	—0,392	1,93449845	1,76342799	1,84509804	1,93449845	1,93449845	1,83884909
(2,10)	204	—	—	—	1,93449845	1,74036269	1,88081359	1,93449845	1,92941893	1,85125835
2,15-2,2499	143	4	5	—0,292	1,98227123	1,84509804	1,96848295	1,98677173	1,94448267	1,81291336
(2,20)	114	—	—	—	2,05307844	1,92941893	2,02530587	2,05307844	2,02118930	1,90848502
	511	—	—	—	2,11394335	1,97772361	2,08278537	2,11394335	2,07188201	1,95424251
	518	—	—	—	2,06445799	1,90848502	2,03742650	2,06445799	2,03342376	1,87506126
	552	—	—	—	2,07188201	1,90848502	2,02938378	2,07188201	2,04532298	1,93449845
2,25-2,3499	102	5	3	—0,192	2,13987909	2,0	2,10037055	2,13987909	2,11727130	2,00432137
(2,30)	145	—	—	—	2,17609126	2,02530587	2,13672057	2,17609126	2,14612804	2,03742650
	72	—	—	—	2,16136800	2,03342376	2,13987909	2,16136800	2,11727130	1,95424251
2,35-2,4499	192	6	5	—0,092	2,19033170	2,06069784	2,16136800	2,19033170	2,16435286	2,06069784
(2,40)	255	—	—	—	2,27875360	2,12385164	2,25527251	2,28330123	2,26951294	2,17609126
	97	—	—	—	2,19312460	2,04139269	2,17026172	2,19312460	2,14612804	2,02530587
	83	—	—	—	2,20411998	2,06069784	2,17026172	2,20411998	2,17897695	2,04139269
	92	—	—	—	2,22271647	2,11394335	2,18469143	2,21748394	2,18469143	2,06445799
2,45-2,5499	62	7	5	+0,008	2,22530928	2,06445799	2,17897595	2,22530928	2,20411998	2,12385164
(2,50)	78	—	—	—	2,29225607	2,10720997	2,24551267	2,29225607	2,27415785	2,18469143
	15	—	—	—	2,21748394	2.09691001	2,19865709	2,21748394	2,18469143	2,07918125
	536	—	—	—	2,32837960	2,19865709	2,29446623	2,32428246	2,31175386	2,20411998
	5	—	—	—	2,29666519	2,17026172	2,27415785	2,29666519	2,26245109	2.15533604
2,55-2,6499	52	8	15	+0,108	2,41497335	2,28103337	2,38201704	2,41664051	2,39093511	2,29666519
(2,60)	118	—	—	—	2,30103000	2,17609126	2,27875360	2,30103000	2,27184161	2,16435286
	85	—	—	—	2,45484486	2,32221929	2,43136376	2,45484486	2,42651126	2,34242268
	77	—	—	—	2,34439227	2,22530928	2,32221929	2,34242268	2,31806333	2,24551267
	68	—	—	—	2,31175386	2,22010809	2,30103000	2,31175386	2,27875360	2,16731733
	56	—	—	—	2.33243846	2,18184359	2,29225607	2,33243846	2,32221929	2,20411998
	50	—	—	—	2,48429984	2,26007139	2,39269695	2,42488164	2,39794001	2,30103000
	35	—	—	—	2,33243846	2,16731733	2,27875360	2,33243846	2,32837960	2,23804610
	28	—	—	—	2,39794001	2,26951294	2,37106786	2,39794001	2,38021124	2,33445375
	254	—	—	—	2,38021124	2,20682588	2.34830486	2,38201704	2,36735592	2,26951294
	34	—	—	—	2,42813479	2,25042000	2,39794001	2,42813479	2,39967372	2,32221929
	497	—	—	—	2,38201704	2,24303805	2,34830486	2,38201704	2,35410844	2,29003461
	502	—	—	—	2,38916608	2,25042000	2,37291200	2,38916608	2,35410844	2,23804610
	503	—	—	—	2,46686762	2,32837960	2,42488164	2,46686762	2,43616265	2,35410844
	136	—	—	—	2,39794001	2,26245109	2,36735592	2,39269695	2,37474835	2,29225607
2.65-2,7499	84	9	13	+0,208	2,43933269	2,27875360	2,39794001	2,43933269	2,41995575	2,33243846
(2,70)	4	—	—	—	2,43933269	2,30103000	2,41830129	2,44247977	2,41830129	2,31386722
	181	—	—	—	2,44870632	2,30319106	2,43616265	2,44870632	2,42160393	2,30319606
	220	—	—	—	2,44870632	2,32221929	2,42488164	2,44870632	2,41830129	2,39619935
	99	—	—	—	2,54406804	2,39794001	2,49968708	2,54406804	2,52633928	2,42488164
	80	—	—	—	2,51188336	2,34439227	2,47275645	2,51188336	2,49136169	2,38201704
	166	—	—	—	2,52504481	2,36735592	2,48572143	2,51851394	2,50650503	2,39794001
	501	—	—	—	2,44715803	2,32837960	2,42488164	2,44715803	2,40993312	2,31175386
	267	—	—	—	2,40823997	2,26245109	2,37291200	2,40654018	2,38916608	2,29225607
	268	—	—	—	2,47129171	2,31175386	2,44404480	2,47129171	2,45484486	2,36361198
	277	—	—	—	2,50242712	2,38021124	2,48144263	2,50242712	2,49554434	2,39794001
	304	—	—	—	2,45636603	2,31175386	2,44090908	2,45636603	2,42488164	2,32221929
	305	—	—	—	2,47712125	2,35218252	2,45939249	2,47421626	2,43933269	2,36172784
$\overline{X}$ = 2,492	$\sum_j \overline{n_j}(X_j - \overline{X}_j)^2 = 2,216800$			$\overline{Y}$	2,29341026	2,14883919	2.26062829	2,29198170	2,26488088	2,16675013

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.
GISEMENT DE WÉRISTER.

Calculs des valeurs de la variable F.

A) l et c

j	n_j	$n_j(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j - \overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j = \overline{Y} + a(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j - Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y^2_{jk}$	$n_j \overline{Y}^2_j$
1	1	—0,592	1,7481880	—1,034927	1,7900090	—0,0418210	—0,0418210	3,05616128334400	3,05616128334400
2	1	—0,492	1,9030900	—0,936320	1,8750430	+0,0280470	+0,0280470	3,62175154810000	3,62175154810000
3	2	—0,784	1,9344985	—1,516647	1,9600770	—0,0255785	—0,0511570	7,48456889300450	7,48456889300450
4	5	—1,460	2,0571266	—3,003405	2,0451110	+0,0120156	+0,0600780	21,16796858098756	21,15884924213780
5	3	—0,576	2,1591128	—1,243649	2,1301450	+0,0289638	+0,0869034	13,98596753997650	13,98530424937152
6	5	—0,460	2,2178093	—1,020192	2,2151790	+0,0026303	+0,0131515	24,59868005043526	24,59339045583245
7	5	+0,040	2,2720188	0,090881	2,3002130	—0,0308245	—0,1541225	25,81969695800011	25,81034713776720
8	15	+1,620	2,3878965	3,868392	2,3852470	+0,0026495	+0,0397425	85,57479647435106	85,53074542068375
9	13	+2,704	2,4707445	6,680893	2,4702810	+0,0004685	+0,0060255	79,37819466846155	79,35951899564325

$$\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j = 1{,}885026$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2} = \frac{1{,}885026}{2{,}216800} = 0{,}85034$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}01197685506652$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00171098$$

$$F = \frac{0{,}00212558}{0{,}00171098} = 1{,}242$$

$$\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \overline{Y}^2_j = 0{,}08714877078207$$

$$\frac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \overline{Y}^2_j \right] = 0{,}00212558$$

$F_0\ (0{,}05) = 3{,}338$
$F_0\ (0{,}01) = 5{,}895$

$\nu_1 = n - p = 41$
$\nu_2 = p - 2 = 7$

Conclusion : Acceptation

B) l et c_1

j	n_j	$n_j(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j - \overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j = \overline{Y} + a(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j - Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y^2_{jk}$	$n_j \overline{Y}^2_j$
1	1	—0,592	1,6020600	—0,948420	1,6389496	—0,0368896	—0,0368896	2,56659624360000	2,56659624360000
2	1	—0,492	1,7634280	—0,867607	1,7250796	+0,0383484	+0,0383484	3,10967831118400	3,10967831118400
3	2	—0,784	1,7518953	—1,373486	1,8112096	—0,0593143	—0,1186286	6,13854063873529	6,13827428432418
4	5	—1,460	1,9138421	—2,794209	1,8973396	+0,0165025	+0,0825125	18,32248056502267	18,31395791866205
5	3	—0,576	2,0195765	—1,163276	1,9834696	+0,0361069	+0,1083207	12,23667633898125	12,23606771805675
6	5	—0,460	2,0801167	—0,956854	2,0695996	+0,0105171	+0,0525855	21,63973731868909	21,63442742809445
7	5	+0,040	2,1274994	+0,085100	2,1557296	—0,0282302	—0,1411510	22,64348125583130	22,63126848500180
8	15	+1,620	2,2430027	+3,633664	2,2418596	+0,0011431	+0,0171465	75,49850532695025	75,46591668310935
9	13	+2,704	2,3278166	+6,294416	2,3279896	—0,0001731	—0,0022503	70,46213080781824	70,44348554973925

$$\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j = 1{,}909328$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2} = \frac{1{,}909328}{2{,}216800} = 0{,}86130$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}01969835956711$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00281405$$

$$F = \frac{0{,}00281405}{0{,}00190620} = 1{,}476$$

$$\sum_j \sum_k Y_{jk} - \sum_j n \overline{Y}^2_j = 0{,}07815418504026$$

$$\frac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \overline{Y}^2_j \right] = 0{,}00190620$$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Acceptation

TABLEAU III (b)

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.
GISEMENT DE WÉRISTER.

Calculs des valeurs de la variable F.

C) l et c_2

j	n_j	$n_j(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j-\overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j=\overline{Y}+a(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j-Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j\overline{Y}_j^2$
1	1	—0,592	1,7075702	—1,010882	1,7473525	—0,0397823	—0,0397823	2,91579598792804	2,91579598792804
2	1	—0,492	1,8750613	—0,922530	1,8340545	+0,0410068	+0,0410068	3,51585487875769	3,51585487875769
3	2	—0,784	1,8629558	—1,460557	1,9207565	—0,0578007	—0,1156014	6,94184642754896	6,94120862550728
4	5	—1,460	2,0286769	—2,961868	2,0074585	+0,0212184	+0,1060920	20,58428968292166	20,57764982296805
5	3	—0,576	2,1256567	—1,224378	2,0941605	+0,0314962	+0,0944886	13,55621414242553	13,55524921876467
6	5	—0,460	2,1883711	—1,006651	2,1808625	+0,0075086	+0,0375430	23,95071388688799	23,94484035657605
7	5	+0,040	2,2383542	+0,089534	2,2675645	—0,0292103	—0,1460515	25,06073039254555	25,05114762328820
8	15	+1,620	2,3539905	+3,813465	2,3542665	—0,0002760	—0,0041400	83,15413582705203	83,11906911135375
9	13	+2,704	2,4430026	+6,605879	2,4409685	+0,0020341	+0,0264433	77,60333127947158	77,58740214688788

$$\sum_j n_j (X_j-\overline{X})\,\overline{Y}_j = 1{,}922012$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j-\overline{X})\,\overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j-\overline{X})^2} = \frac{1{,}922012}{2{,}216800} = 0{,}86702$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}-Y_j)^2 = 0{,}01977619967341$$

$$\frac{1}{p-2}\sum_j n_j (\overline{Y}_j-Y_j)^2 = 0{,}00282517$$

$$F = \frac{0{,}00282517}{0{,}00182182} = 1{,}551$$

$$\sum_j\sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}07469473380742$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j\sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2\right] = 0{,}00182182$$

$F_0\,(0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\,(0{,}01) = 3{,}11$

$\nu_1 = p-2 = 7$
$\nu_2 = n-p = 41$

Conclusion : Acceptation

D) l et c_3

j	n_j	$n_j(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j-\overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j=\overline{Y}+a(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j-Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j\overline{Y}_j^2$
1	1	—0,592	1,7481880	—1,0349273	1,7911911	—0,0430031	—0,0430031	3,05616128334400	3,05616128334400
2	1	—0,492	1,9030900	—0,9363203	1,8757841	+0,0273059	+0,0273059	3,62175154810000	3,62175154810000
3	2	—0,784	1,9344985	—1,5166468	1,9603771	—0,0258786	—0,0517572	7,48456889300450	7,48456889300450
4	5	—1,460	2,0580267	—3,0047190	2,0449701	+0,0130566	+0,0652830	21,18583125855901	21,17736948956445
5	3	—0,576	2,1591128	—1,2436490	2,1295631	+0,0295497	+0,0886491	13,98596753997650	13,98530424937152
6	5	—0,460	2,2176723	—1,0201293	2,2141561	+0,0035162	+0,0175810	24,59619265823070	24,59035215093645
7	5	+0,040	2,2711994	+0,0908480	2,2987491	—0,0275497	—0,1377485	25,80063453611020	25,79173357280180
8	15	+1,620	2,3836860	+3,8615713	2,3833421	+0,0003439	+0,0051585	85,26540170669683	85,22938419894000
9	13	+2,704	2,4701300	+6,6792315	2,4679351	+0,0021949	+0,0285337	79,33805144395451	79,32004881970000

$$\sum_j n_j (X_j-\overline{X})\,\overline{Y}_j = 1{,}8752591$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j-\overline{X})\,\overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j-\overline{X})^2} = \frac{1{,}8752591}{2{,}216800} = 0{,}84593$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}_j-Y_j)^2 = 0{,}01132736177734$$

$$\frac{1}{p-2}\sum_j n_j (\overline{Y}_j-Y_j)^2 = 0{,}00161819$$

$$F = \frac{0{,}00189982}{0{,}00161819} = 1{,}174$$

$$\sum_j\sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}0778926623$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j\sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2\right] = 0{,}00189982$$

$F_0\,(0{,}05) = 3{,}338$
$F_0\,(0{,}01) = 5{,}895$

$\nu_1 = n-p = 41$
$\nu_2 = p-2 = 7$

Conclusion : Acceptation

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE. GISEMENT DE WÉRISTER.

Calculs des valeurs de la variable F.

E) l et c_4

j	n_j	$n_j(X_j-\overline{X})$	$\overline{y}$	$n_j(X_j-\overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j=\overline{Y}+a(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j-Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j\overline{Y}_j^2$
1	1	—0,592	1,7160033	—1,0158740	1,7588452	—0,0428419	—0,0428419	2,94466732561089	2,94466732560189
2	1	—0,492	1,8692317	—0,9196620	1,8442242	+0,0249075	+0,0249075	3,49402714828489	3,49402714828489
3	2	—0,784	1,9319587	—1,5146556	1,9298032	+0,0021555	+0,0043110	7,46494173817946	7,46492883701138
4	5	—1,460	2,0232601	—2,9539597	2,0152822	+0,0079779	+0,0398895	20,47707270369322	20,46790716126005
5	3	—0,576	2,1268902	—1,2250888	2,1007612	+0,0261290	+0,0783870	13,57154090799138	13,57098576856812
6	5	—0,460	2,1887324	—1,0068169	2,1862402	+0,0024922	+0,0124610	23,96179495115178	23,95274759404880
7	5	+0,040	2,2474348	+0,0898974	2,2717192	—0,0242844	—0,1214220	25,26570671582279	25,25481590125520
8	15	+1,620	2,3600675	+3,8233094	2,3571982	+0,0028693	+0,0430395	83,58228227425567	83,54877906834375
9	13	+2,704	2,4473901	+6,6177428	2,4426772	+0,0047129	+0,0612677	77,88884640307978	77,86633792051413

$$\sum_j n_j (X_j - \overline{X})\,\overline{Y}_j = 1{,}8948926$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - X)\,\overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2} = \frac{1{,}8948926}{2{,}216800} = 0{,}85479$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00822347017909$$

$$\frac{1}{p-2}\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00117478$$

$$F = \frac{0{,}00208984}{0{,}00117478} = 1{,}779$$

$$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}0856834433$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2\right] = 0{,}00208984$$

$F_0\ (0{,}05) = 3{,}388$
$F_0\ (0{,}01) = 5{,}895$

$\nu_1 = n - p = 41$
$\nu_2 = p - 2 = 7$

Conclusion : Acceptation

F) l et c_5

j	n_j	$n_j(X_j-\overline{X})$	$\overline{y}_j$	$n_j(X_j-\overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j=\overline{Y}+a(X_j-\overline{X})$	$\overline{Y}_j-Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j\overline{Y}_j^2$
1	1	—0,592	1,6127839	—0,9547681	1,6384257	—0,0256418	—0,0256418	2,60107190809921	2;60107190809921
2	1	—0,492	1,7781513	—0,8748504	1,7276697	+0,0504816	+0,0504816	3,16182204569169	3,16182204569169
3	2	—0,784	1,8450537	—1,4465221	1,8169137	+0,0281400	+0,0562800	6,80852367614137	6,80844631176738
4	5	—1,460	1,8970401	—2,7696785	1,9061577	—0,0091176	—0,0455880	18,00617306519075	17,99380570504005
5	3	—0,576	1,9986635	—1,1512302	1,9954017	+0,0032618	+0,0097854	11,98747476620646	11,98396735869675
6	5	—0,460	2,0735891	—0,9538510	2,0846457	—0,0110566	—0,0552830	21,51298374681263	21,49885877819405
7	5	+0,040	2,1494361	+0,0859774	2,1738897	—0,0244536	—0,1222680	23,11023525762221	23,10037773991605
8	15	+1,620	2,2706732	+3,6784906	2,2631337	+0,0075395	+0,1130925	77,38980359462401	77,33935171797360
9	13	+2,704	2,3538499	+6,3648101	2,3523777	+0,0014722	+0,0191386	72,05078935192297	72,02792157249013

$$\sum_j n_j (X_j - \overline{X})\,\overline{Y}_j = 1{,}9783578$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \bar{X})\,\overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2} = \frac{1{,}9783578}{2{,}2168} = 0{,}89244$$

$$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00971915574559$$

$$\frac{1}{p-2}\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00138845$$

$$F = \frac{0{,}00276230}{0{,}00138845} = 1{,}989$$

$$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j u_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}1132542743$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2\right] = 0{,}00276230$$

$F_0\ (0{,}05) = 3{,}338$
$F_0\ (0{,}01) = 5{,}895$

$\nu_1 = n - p = 41$
$\nu_2 = p - 2 = 7$

Conclusion : Acceptation

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE. GISEMENT DE RESSAIX.

Données des calculs : Logarithmes des mesures du diamètre margino-latéral (c) et des cordes transversales (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5), effectuées sur 50 valves, classées suivant les valeurs croissantes du logarithme de la mesure du diamètre antéro-postérieur l.

Intervalles log l et valeur centrale	Référ. des pièces	j	n_j	$X_j - \overline{X}$	log c	log c_1	log c_2	log c_3	log c_4	log c_5
1,75-1,8499 (1,80)	698	1	1	—0,376	1,61278386	1,41497335	1,57978360	1,61278386	1,60205999	1,51851394
1,85-1,9499 (1,90)	671	2	2	—0,276	1,76342799	1,61278386	1,73239376	1,76342799	1,74036269	1,64345268
	839	—	—	—	1,69019608	1,53147892	1,65321251	1,69019608	1,66275783	1,55630250
1,95-2,0499 (2,00)	662	3	12	—0,176	1,86332286	1,69019608	1,81954394	1,86332286	1,83250891	1,72427587
	668	—	—	—	1,87506126	1,73239376	1,83884909	1,87506126	1,83884909	1,72427587
	690	—	—	—	1,87506126	1,69897000	1,83884909	1,87506126	1,85125835	1,72427587
	693	—	—	—	1,82607480	1,69019608	1,80617997	1,82607480	1,78532984	1,65321251
	757	—	—	—	1,79934055	1,63346846	1,76342799	1,79934055	1,78532984	1,69019608
	772	—	—	—	1,89209460	1,70757018	1,85125835	1,89209460	1,87506126	1,77085201
	781	—	—	—	1,83884909	1,65321251	1,79239169	1,83884909	1,83250891	1,72427587
	790	—	—	—	1,89762709	1,76342799	1,86332286	1,89762709	1,86923172	1,74818803
	807	—	—	—	1,84509804	1,66275783	1,80617997	1,84509804	1,80617997	1,69897000
	863	—	—	—	1,83884909	1,64345268	1,79239169	1,83884909	1,80617997	1,69019608
	866	—	—	—	1,86332286	1,69019608	1,81954394	1,86332286	1,82607480	1,70757018
	870	—	—	—	1,88081359	1,72427587	1,86332286	1,88081359	1,85733250	1,76342799
2,05-2,1499 (2,10)	829	4	13	—0,076	1,89762709	1,73239376	1,87506126	1,89762709	1,87506126	1,74818803
	677	—	—	—	1,91907809	1,77085201	1,90308999	1,91907809	1,89762709	1,79934055
	692	—	—	—	1,90848502	1,76342799	1,88081359	1,90848502	1,87506126	1,74036269
	747	—	—	—	1,86923172	1,70757018	1,84509804	1,86923172	1,84509804	1,74818803
	775	—	—	—	1,94448267	1,75587486	1,89762709	1,94448267	1,91907809	1,79934055
	778	—	—	—	1,88081359	1,69019608	1,83884909	1,88081359	1,86332286	1,75587486
	788	—	—	—	1,94448267	1,79934055	1,90848502	1,94448267	1,91907809	1,78532984
	800	—	—	—	1,94939001	1,77085201	1,89762709	1,94448267	1,92427929	1,81291336
	816	—	—	—	1,85733250	1,71600334	1,83250891	1,85125835	1,81954394	1,71600334
	838	—	—	—	1,86923172	1,70757018	1,83250891	1,86923172	1,83250891	1,69897000
	849	—	—	—	1,89209460	1,73239376	1,86332286	1,89209460	1,86332286	1,74818803
	856	—	—	—	1,86923172	1,72427587	1,83884909	1,86923172	1,83884909	1,73239376
	868	—	—	—	1,88081359	1,69897000	1,84509804	1,88081359	1,86332286	1,76342799
2,15-2,2499 (2,20)	663	5	7	+0,024	1,97772361	1,83884909	1,94939001	1,97772361	1,94939001	1,83250891
	669	—	—	—	1,94939001	1,76342799	1,90848502	1,94939001	1,93449845	1,83884909
	769	—	—	—	2,05690485	1,88081359	2,02118930	2,05690485	2,03742650	1,94448267
	820	—	—	—	1,94448267	1,80617997	1,91907809	1,94448267	1,90308999	1,77085201
	834	—	—	—	1,91907809	1,73239376	1,88081359	1,91907809	1,88081359	1,76324799
	859	—	—	—	1,93951925	1,78532984	1,90848502	1,93449845	1,89762709	1,77815125
	871	—	—	—	2,02118930	1,84509804	1,98677173	2,02118930	2,01283722	1,90308999
2,25-2,3499 (2,30)	750	6	3	+0,124	2,11394335	1,97312785	2,08635983	2,11394335	2,09342169	1,99122608
	753	—	—	—	2,11727130	1,95424251	2,07188201	2,11394335	2,08990511	1,98227123
	743	—	—	—	2,14612804	1,96848295	2,10380372	2,14612804	2,12710480	1,83884909
2,35-2,4499 (2,40)	736	7	5	+0,224	2,18469143	2,05307844	2,16435286	2,18469143	2,17318627	2,08278537
	762	—	—	—	2,10037055	1,94448267	2,08278537	2,10037055	2,07554696	1,96848295
	821	—	—	—	2,11058971	1,97312785	2,07918125	2,10720997	2,08990511	1,99122608
	821′	—	—	—	2,15228834	2,0	2,11727130	2,14612804	2,13987909	2,05307844
	835	—	—	—	2,13033377	1,94939001	2,08635983	2,13093377	2,11394335	2,03342376
2,45-2,5499 (2,50)	735	8	6	+0,324	2,27415785	2,18469143	2,22788670	2,27415785	2,23299611	2,11394335
	737	—	—	—	2,25042000	2,06445799	2,19865709	2,24551267	2,23044892	2,12710480
	742	—	—	—	2,17026172	1,97772361	2,13033377	2,17026172	2,14612804	2,04139269
	822	—	—	—	2,24551267	2,08278537	2,21484385	2,24303805	2,22530928	2,11727130
	814	—	—	—	2,26951294	2,14921911	2,25285303	2,26951294	2,23299611	2,11727130
	836	—	—	—	2,23044892	2,07188201	2,19865709	2,22788670	2,20139712	2,11394335
2,55-2,6499 (2,60)	667	9	1	+0,424	2,26951294	2,13353891	2,25527251	2,26951294	2,23299611	2,12710480
$\overline{X} = 2.176$	$\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2 = 1,851200$			$\overline{Y}$	1,97235899	1,81102794	1,93848607	1,97158270	1,94656052	1,83374486

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles. — Public. No 12. 1952.

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.
GISEMENT DE RESSAIX.

Calculs des valeurs de la variable F.

A) *l* et *c*

j	n_j	$n_j(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j - \overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j = Y + a(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j = Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j \overline{Y}_j^2$
1	1	—0,376	1,6127839	—0,6064067	1,6734616	—0,0606777	—0,0606777	2,60107190809921	2,60107190809921
2	2	—0,552	1,7268120	—0,9532002	1,7529556	—0,0261436	—0,0522872	5,96644116763921	5,96375936668800
3	12	—2,112	1,8579596	—3,9240107	1,8324496	+0,0255100	+0,3061200	41,45341902554175	41,42416650278592
4	13	—0,988	1,8986381	—1,8758544	1,9119436	—0,0133055	—0,1729715	46,87501870472760	46,86274625203093
5	7	+0,168	1,9726125	+0,3313989	1,9914376	—0,0188251	—0,1317757	27,25318480374685	27,23840052609375
6	3	+0,372	2,1257809	+0,7907905	2,0709316	+0,0548493	+0,1645479	13,55745984859125	13,55683330441443
7	5	+1,120	2,1356548	+2,3919334	2,1504256	—0,0147708	—0,0738540	22,80968907806374	22,80510712381520
8	6	+1,944	2,2400524	+4,3546619	2,2299196	+0,0101328	+0,0607968	30,11413856165821	30,10700852847456
9	1	+0,424	2,2695129	+0,9622735	2,3094136	—0,0399007	—0,0399007	5,15068880326641	5,15068880326641

$\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j = 1{,}4715862$

$a = \dfrac{\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \overline{X})^2} = \dfrac{1{,}4715862}{1{,}851200} = 0{,}79494$

$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}02996437061273$

$\dfrac{1}{p-1} \sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00428062$

$F = \dfrac{0{,}00428062}{0{,}00173975} = 2{,}461$

$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}0713295856$

$\dfrac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 \right] = 0{,}00173975$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Douteuse

B) *l* et c_1

j	n_j	$n_j(X_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j$	$n_j(X_j - \overline{X})\overline{Y}_j$	$Y_j = Y + a(Y_j - \overline{X})$	$\overline{Y}_j - Y_j$	$n_j(\overline{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j \overline{Y}_j^2$
1	1	—0,376	1,4149734	—0,5320300	1,4992074	—0,0842340	—0,0842340	2,00214972270756	2,00214972270756
2	2	—0,552	1,5721314	—0,8678165	1,5821384	—0,0100070	—0,0200140	4,94649952924442	4,94319427773192
3	12	—2,112	1,6908431	—3,5710606	1,6650694	+0,0257737	+0,3092844	34,32360877622355	34,30740466581132
4	13	—0,988	1,7361324	—1,7152988	1,7480004	—0,0118680	—0,1542840	39,24025430187324	39,18402423428688
5	7	+0,168	1,8074418	+0,3036502	1,8309314	—0,0234896	—0,1644272	22,88376771675025	22,86792102271068
6	3	+0,372	1,9652844	+0,7310858	1,9138624	+0,0514220	+0,1542660	11,58722277985366	11,58702831865008
7	5	+1,120	1,9840158	+2,2220977	1,9967934	—0,0127776	—0,0638880	19,68949896900426	19,68159347324820
8	6	+1,944	2,0884599	+4,0599660	2,0797244	+0,0087355	+0,0524130	26,19608676917689	26,16998852344806
9	1	+0,424	2,1335389	+0,9046205	2,1626554	—0,0291165	—0,0291165	4,55198823781321	4,55198823781321

$\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}_j = 1{,}5352143$

$a = \dfrac{\sum_j n_j (X_j - \overline{X}) \overline{Y}}{\sum_j n_j (X_j - \overline{Y})^2} = \dfrac{1{,}5352143}{1{,}851200} = 0{,}82931$

$\sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j) = 0{,}03101504775795$

$\dfrac{1}{p-2} \sum_j n_j (\overline{Y}_j - Y_j) = 0{,}00443072$

$F = \dfrac{0{,}00443072}{0{,}00306791} = 1{,}444$

$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 = 0{,}12578432623813$

$\dfrac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \overline{Y}_j^2 \right] = 0{,}00306791$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Acceptation

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles. — Public. No 12, 1952.

TABLEAU V (b)

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.
GISEMENT DE RESSAIX.

Calculs des valeurs de la variable F.

C) l et c_2

j	n_j	$n_j(X_j - \bar{X})$	$\bar{Y}_j$	$n_j(X_j - \bar{X})\bar{Y}_j$	$Y_j = \bar{Y} + a(X_j - \bar{X})$	$\bar{Y}_j - Y_j$	$n_j(\bar{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j \bar{Y}_j^2$
1	1	—0,376	1,5797836	—0,5939986	1,6372875	—0,0575039	—0,0575039	2,49571622282896	2,49571622282896
2	2	—0,552	1,6928031	—0,9344273	1,7173935	—0,0245904	—0,0491808	5,73429984843469	5,73116467073922
3	12	—2,112	1,8212718	—3,8465260	1,7974995	+0,0237723	+0,2852676	39,82990086453720	39,80437163370288
4	13	—0,988	1,8660722	—1,8436793	1,8776055	—0,0115333	—0,1499329	45,27901369250892	45,26893092296692
5	7	+0,168	1,9391733	+0,3257811	1,9577115	—0,0185382	—0,1297674	26,33753988874995	26,32275161203023
6	3	+0,372	2,0873485	+0,7764936	2,0378175	+0,0495310	+0,1485930	13,07158224511373	13,07107128135675
7	5	+1,120	2,1059901	+2,3587089	2,1179235	—0,0119334	—0,0596670	22,18114834932099	22,17597150649005
8	6	+1,944	2,2038719	+4,2843270	2,1980295	+0,0058424	+0,0350544	29,15086747519636	29,14230810965766
9	1	+0,424	2,2552725	+0,9562355	2,2781355	—0,0228630	—0,0228630	5,08625404925625	5,08625404925625

$$\sum_j n_j (X_j - \bar{X}) \bar{Y}_j = 1{,}4829149$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \bar{X}) \bar{Y}_j}{\sum n_j (X_j - \bar{X})^2} = \frac{1{,}4829149}{1{,}851200} = 0{,}80106$$

$$\Sigma\, n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}02423192481362$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00346170$$

$$F = \frac{0{,}00346170}{0{,}00165324} = 2{,}094$$

$$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \bar{Y}_j^2 = 0{,}067782691813$$

$$\frac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \bar{Y}_j^2 \right] = 0{,}00165324$$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Acceptation

D) l et c_3

j	n_j	$n_j(X_j - \bar{X})$	$\bar{Y}_j$	$n_j(X_j - \bar{X})\bar{Y}_j$	$Y_j = Y + a(X_j - \bar{X})$	$\bar{Y} - Y_j$	$n_j(\bar{Y}_j - Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y_{jk}^2$	$n_j \bar{Y}_j^2$
1	1	—0,376	1,6127839	—0,6064067	1,6737155	—0,0609316	—0,0609316	2,60107190809921	2,60107190809921
2	2	—0,552	1,7268120	—0,9532002	1,7529355	—0,0261235	—0,0522470	5,96644116763921	5,96375936668800
3	12	—2,112	1,8579596	—3,9240107	1,8321555	+0,0258041	+0,3096492	41,45341902554175	41,42416650278592
4	13	—0,988	1,8977934	—1,8750199	1,9113755	—0,0135821	—0,1765673	46,83338395124120	46,82105725808628
5	7	+0,168	1,9718953	+0,3312784	1,9905955	—0,0187002	—0,1309014	27,23373413517661	27,21859751913463
6	3	+0,372	2,1246716	+0,7903778	2,0698155	+0,0548561	+0,1645683	13,54337879919112	13,54268822353968
7	5	+1,120	2,1337468	+2,3897964	2,1490355	—0,0152887	—0,0764435	22,76895548663304	22,76437703255120
8	6	+1,944	2,2383950	+4,3514399	2,2282555	+0,0101395	+0,0608370	30,06954515583550	30,06247305615000
9	1	+0,424	2,2695129	+0,9622735	2,3074755	—0,0379626	—0,0379626	5,15068880326641	5,15068880326641

$$\sum_j n_j (X_j - \bar{X}) \bar{Y}_j = 1{,}4665285$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \bar{X}) \bar{Y}_j}{\sum_j n_j (X_j - \bar{X})} = \frac{1{,}4665285}{1{,}851200} = 0{,}79220$$

$$\sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}03016810301073$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00430973$$

$$F = \frac{0{,}00430973}{0{,}00174973} = 2{,}463$$

$$\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \bar{Y}_j^2 = 0{,}07173875232272$$

$$\frac{1}{n-p} \left[\sum_j \sum_k Y_{jk}^2 - \sum_j n_j \bar{Y}_j^2 \right] = 0{,}00174973$$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Douteuse

TEST DE VALIDITÉ DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

GISEMENT DE RESSAIX.

Calculs des valeurs de la variable F.

E) l et c_4

j	n_j	$n_j(X_j-\bar{X})$	$\bar{Y}_j$	$n_j(X_j-\bar{X})\bar{Y}_j$	$Y_j=\bar{Y}+a(X_j-\bar{X})$	$\bar{Y}_j-Y_j$	$n_j(\bar{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y^2_{jk}$	$n_j\bar{Y}^2_j$
1	1	—0,376	1,6020600	—0,6023746	1,6478135	—0,0457535	—0,0457535	2,56659624360000	2,56659624360000
2	2	—0,552	1,7015603	—0,9392613	1,7272675	—0,0257072	—0,0514144	5,79362582901213	5,79061490907218
3	12	—2,112	1,8304871	—3,8659888	1,8067215	+0,0237656	+0,2851872	40,22819400542974	40,20819627919692
4	13	—0,988	1,8720118	—1,8495477	1,8861755	—0,0141637	—0,1841281	45,57676890415196	45,55756633141012
5	7	+0,168	1,9450976	+0,3267764	1,9656295	—0,0205319	—0,1437233	26,50522611190771	26,48383271468032
6	3	+0,372	2,1034772	+0,7824935	2,0450835	+0,0583937	+0,1751811	13,27478446214730	13,27384899275952
7	5	+1,120	2,1184922	+2,3727113	2,1245375	—0,0060453	—0,0302265	22,44617663174307	22,44004600730420
8	6	+1,944	2,2115459	+4,2992452	2,2039915	+0,0075544	+0,0453264	29,35146152568053	29,34561160684086
9	1	+0,424	2,2329961	+0,9467903	2,2834455	—0,0504494	—0,0504494	4,98627158261521	4,98627158261521

$$\sum_j n_j (X_j - \bar{X})\,\bar{Y}_j = 1{,}4708443$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \bar{X})\,\bar{Y}_j}{\sum n_j (X_j - \bar{X}_j)^2} = \frac{1{,}4708443}{1{,}851200} = 0{,}79454$$

$$\sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}02905135211553$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00415019$$

$$F = \frac{0{,}00415019}{0{,}00186636} = 2{,}224$$

$$\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \bar{Y}^2_j = 0{,}07652062880832$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \bar{Y}^2_j\right] = 0{,}00186636$$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Acceptation

F) l et c_5

j	n_j	$n_j(X_j-\bar{X})$	$\bar{Y}_j$	$n_j(X_j-\bar{X})\bar{Y}_j$	$Y_j=\bar{Y}+a(X_j-\bar{X})$	$\bar{Y}_j-Y_j$	$n_j(\bar{Y}_j-Y_j)$	$\sum_{k=1}^{n_j} Y^2_{jk}$	$n_j\bar{Y}^2_j$
1	1	—0,376	1,5185139	—0,5709612	1,5347158	—0,0162019	—0,0162019	2,30588446449321	2,30588446449321
2	2	—0,552	1,5998776	—0,8831324	1,6142448	—0,0143672	—0,0287344	5,12301424864354	5,11921666996352
3	12	—2,112	1,7183097	—3,6290701	1,6937738	+0,0245359	+0,2944308	35,44319824960995	35,43105870136908
4	13	—0,988	1,7575785	—1,7364876	1,7733028	—0,0157243	—0,2044159	40,17178649829095	40,15806838760925
5	7	+0,168	1,8330517	+0,3079527	1,8528318	—0,0197801	—0,1384607	23,54963656262900	23,52054974411023
6	3	+0,372	1,9374488	+0,7207310	1,9323608	+0,0050880	+0,0152640	11,27574650424146	11,26112355786432
7	5	+1,120	2,0257993	+2,2688952	2,0118898	+0,0139095	+0,0695475	20,52784499201637	20,51931401940245
8	6	+1,944	2,1051545	+4,0924203	2,0914188	+0,0137357	+0,0824142	26,59504789821083	26,59005281322150
9	1	+0,424	2,1271048	+0,9018924	2,1709478	—0,0438430	—0,0438430	4,52457483018304	4,52457483018304

$$\sum_j n_j (X_j - \bar{X})\,\bar{Y}_j = 1{,}4722403$$

$$a = \frac{\sum_j n_j (X_j - \bar{X})\,\bar{Y}_j}{\sum n_j (X_j - \bar{X})^2} = \frac{1{,}4722403}{1{,}851200} = 0{,}79529$$

$$\sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}01795178208864$$

$$\frac{1}{p-2} \sum_j n_j (\bar{Y}_j - Y_j)^2 = 0{,}00256454$$

$$F = \frac{0{,}00256454}{0{,}00211929} = 1{,}210$$

$$\sum \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \bar{Y}^2_j = 0{,}08689106001175$$

$$\frac{1}{n-p}\left[\sum_j \sum_k Y^2_{jk} - \sum_j n_j \bar{Y}^2_j\right] = 0{,}00211929$$

$F_0\ (0{,}05) = 2{,}245$
$F_0\ (0{,}01) = 3{,}110$

$\nu_1 = p - 2 = 7$
$\nu_2 = n - p = 41$

Conclusion : Acceptation

CALCULS D'ESTIMATION DES CONSTANTES DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

(Extraits des données et calculs finaux.)

I. — GISEMENT DE WÉRISTER.

N° d'ordre	Référence des pièces	log l	log c	log c_1	log c_2	log c_3	log c_4	log c_5
1	136	2,64345268	2,39794001	2,26245109	2,36735592	2,39269695	2,37474835	2,29225607
2	118	2,56229286	2,30103000	2,17609126	2,27875360	2,30103000	2,27184161	2,16435286
3	85	2,64345268	2,45484486	2,32221929	2,43136376	2,45484486	2,42651126	2,34242268
4	84	2,68574174	2,43933269	2,27875360	2,39794001	2,43933269	2,41995575	2,33243846
5	62	2,45484486	2,22530928	2,06445799	2,17897695	2,22530928	2,20411998	2,12385164
6	78	2,54406804	2,29225607	2,10720997	2,24551267	2,29225607	2,27415785	2,18469143
7	77	2,55022835	2,34439227	2,22530928	2,32221929	2,34242268	2,31806333	2,24551267
8	68	2,56820172	2,31175386	2,22010809	2,30103000	2,31175386	2,27875360	2,16731733
9	56	2,59106461	2,33243846	2,18184359	2,29225607	2,33243846	2,32221929	2,20411998
10	50	2,62324929	2,48429984	2,26007139	2,39269695	2,42488164	2,39794001	2,30103000
11	35	2,55630250	2,33243846	2,16731733	2,27875360	2,33243846	2,32837960	2,23804610
12	28	2,57403127	2,39794001	2,26951294	2,37106786	2,39794001	2,38021124	2,33445375
201	1319	2,64640373	2,43296929	2,29003461	2,40140054	2,43296929	2,39794001	2,25527251
202	1350	2,29666519	2,08278537	1,95904139	2,06445799	2,08278537	2,07918125	2,0
203	1367	2,25767857	2,07188201	1,91907809	2,03342376	2,07188201	2,06069784	1,99122608
204	1373	2,40654018	2,15533604	2,02530587	2,13353891	2,15533604	2,11727130	2,0
205	1427	2,33242846	2,14612804	2,01283722	2,12385164	2,14612804	2,10037055	1,96848295
206	1432	2,03342376	1,84509804	1,69897000	1.81291336	1.84509804	1,79934055	1,66275783
207	1436	2,50242712	2,23044892	2,11727130	2,21218760	2,23044892	2,20411998	2,10037055
208	1440	2,48429984	2,31806333	2,19033170	2,29003461	2,31806333	2,29666519	2,19312460
209	1453	2,54777471	2,33645973	2,22530928	2,32633586	2,33445375	2,30103000	2,17609126
210	1447	2,63144377	2,37106786	2,25527251	2,33845649	2,36735592	2.35793485	2,27415785
211	1448	2,42488164	2,23044892	2,07918125	2,19865709	2,23044892	2,21748394	2,12385164
ΣX_i et ΣY_i		527,23819377	483,29422070	455,07214497	477,28636127	483,12699920	477,54138987	456,03356312
$\overline{X}$ et $\overline{Y}$		2,49875921	2,29049394	2,15674002	2,26202067	2,28970142	2,26322934	2,16129651
ΣX_i^2 et $\Sigma X_i Y_i$		1325,86749050 54546796	1215,31872006 59788735	1144,99873513 42296744	1200,33115154 33834430	1214,88228509 75785568	1201.05907190 55369493	1147.57286601 83356193
$n\overline{X}^2$ et $n\overline{X}.\overline{Y}$		1317,44129254 65521217	1207,63588776 67307538	1137,11571257 62736754	1192,62369232 12052259	1207,21804095 34041534	1193,26094930 88692118	1139,51806813 38047427
$\Sigma X_i Y_i - n\overline{X}.\overline{Y}$		—	7,68283229 92481197	7,88302255 79559990	7,70745922 21782171	7 66424414 41744034	7,79812259 66677375	8,05479788 45308766
$\Sigma X_i^2 - n\overline{X}^2$		8,42619795 89025579	—	—	—	—	—	—
$a = \dfrac{\Sigma X_i Y_i - n\overline{X}.\overline{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\overline{X}^2}$			0,91178	0,93554	0,91470	0,90957	0.92546	0.95592

Assoc. Étude Paléont. Stratigraph. Houillères, Bruxelles. — Public. No 12, 1952.

CALCULS D'ESTIMATION DES CONSTANTES DES RELATIONS D'ALLOMÉTRIE.

(Extraits des donnée et calculs finaux.)

II. — GISEMENT DE RESSAIX.

No d'ordre	Référence des pièces	log l	log c	log c_1	log c_2	log c_3	log c_4	log c_5
1	172	2,28103337	2,01283722	1,77815125	1,97312785	2,01283722	1,97312785	1,83884909
2	173	2,29666519	2,05307844	1,83884909	2,00432137	2,05307844	2,04139269	1,95904139
3	174	2,31175386	2,05307844	1,83884909	2,00432137	2,05307844	2,04532298	1,94939001
4	190	2,26481782	2,05307844	1,90308999	2,02118930	2,05307844	2,02118930	1,90848502
5	191	2,07918125	1,92427929	1,78532984	1,90848502	1,92427929	1,88649073	1,76342799
6	192	2,22530928	2,03342376	1,92941893	2,02118930	2,02938378	2,00432137	1,93449845
7	194	1,83250891	1,70757018	1,55630250	1,68124124	1,70757018	1,68124124	1,53147892
8	195	2,19312460	1,97772361	1,81291336	1,94448267	1,97772361	1,96378783	1,86332286
9	199	2,38560627	2,15228834	1,98227123	2,10720997	2,14921911	2,14301480	2,03342376
10	201	2,04139269	1,88081359	1,74818803	1,85125835	1,88081359	1,84509804	1,72427587
11	202	2,00432137	1,83250891	1,65321251	1,79934055	1,83250891	1,80617997	1,69897000
12	203	2,24551267	2,07554696	1,88081359	2,02530587	2,07554696	2,05307844	1,94939001
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
311	1358	2,28555731	2,03342376	1,88649073	2,00860017	2,03342376	1,99563519	1,88649073
312	1359	2,27875360	2,03342376	1,89762709	2,01283722	2,03342376	1,98227123	1,85125835
313	1361	2,21484385	2,03342376	1,87506126	1,99563519	2,03342376	2,01283722	1,90308999
314	1362	2,31806333	2,05307844	1,89209460	2,01283722	2,05307844	2,03742650	1,93951925
315	1364	2,19865709	2,01703334	1,85125835	1,97772361	2,01703334	1,99563519	1,87506126
316	1365	2,08278537	1,94939001	1,81954394	1,92427929	1,94939001	1,91907809	1,80617997
317	1366	2,25527251	2,05307844	1,88081359	2,00860017	2,04921802	2,02530587	1,92941893
318	1368	2,17026172	1,91907809	1,72427587	1,87506126	1,91907809	1,89762700	1,79239169
319	1369	2,17609126	1,93449845	1,72427587	1,87506126	1,92941893	1,90848502	1,77815125
320	1370	2,20411998	1,97772361	1,86332286	1,95904139	1,97772361	1,94939001	1,83250891
ΣX_i et ΣY_i		705,07495691	637,34292849	586,98847816	626,24866585	637,11222240	629,23812349	593,77762886
$\overline{X}$ et $\overline{Y}$		2,20335924	1,99169665	1,83433899	1,95702708	1,99097570	1,96636914	1,85555509
ΣX^2_i et $\Sigma X_i Y_i$		1562,95109768 41048568	1412,59807952 49711680	1301,72825862 33261052	1388,18845375 64862778	1412,15601180 19229906	1394,87392031 80402695	1316,77791240 39069166
$n \overline{X}^2$ et $n \overline{X} . \overline{Y}$		1553,53342120 02503484	1404,29542967 65413515	1293,34648433 25829209	1379,85078410 27031228	1403,78710588 63570870	1386,43763665 46537574	1308,30542512 58811719
$\Sigma X_i Y_i - n \overline{X} . \overline{Y}$		—	8,30264984 84298165	8,38177429 07431843	8,33766965 37831550	8,36890591 55659036	8,43628366 33865121	8,47248727 80257447
$\Sigma X^2_i - n \overline{X}^2$		9,41767648 38545084	—	—	—	—	—	—
$a = \dfrac{\Sigma X_i Y_i - n \overline{X} . \overline{Y}}{\Sigma X^2_i - n \overline{X}^2}$			0,88160	0,89000	0,88532	0,88864	0,89579	0,89964

PUBLICATIONS ANTÉRIEURES

1. — CH. ANCION, W. VAN LECKWYCK, F. DEMANET, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude du Namurien et du Westphalien inférieur du Bassin de Huy recoupés par la galerie de Java* (Couthuin, Belgique), in-4° 1947

2. — CH. DELÉPRS et A. PASTIELS, *Étude biométrique des Anthraconauta du Houiller de la Belgique* (Première partie), in-4° 1947

3. — CH. ANCION, J. DAUTREBANDE, W. VAN LECKWYCK, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude géologique du Bassin houiller de Liège. La concession de Marihaye*, in-4° 1948

4. — W. VAN LECKWYCK, M. SNEL, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude du Gisement houiller de la Campine. Contribution à l'Étude stratigraphique et paléontologique du Westphalien B inférieur : La zone d'Asch*, in-4° 1949

5. — H. CHAUDOIR, M. SNEL, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude du Gisement houiller de la Campine. Contribution à l'Étude stratigraphique et paléontologique du Westphalien B supérieur : La zone d'Eikenberg*, in-4° 1950

6. — H. CHAUDOIR, CH. ANCION, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude géologique du Bassin houiller de Liège. Le Massif de Herve. Région orientale*, in-4° 1950

7. — A. PASTIELS, *Étude du Gisement houiller de la Campine. Contribution à l'étude stratigraphique et paléontologique du Westphalien B. Quelques éléments de la faune non marine*, in-4° 1951

8. — H. CHAUDOIR, CH. ANCION, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude géologique du Bassin houiller de Liège. Le massif de Herve. Région occidentale*, in-4° 1951

9. — W. VAN LECKWYCK, A. BIOT, F. DEMANET, A. PASTIELS et Y. WILLIÈRE, *Étude géologique du Bassin houiller de Charleroi. La concession Tergnée-Aiseau-Presle* (Première partie), in-4° 1951

10. — W. VAN LECKWYCK, J. SCHEERE, F. DEMANET et Y. WILLIÈRE, *Étude géologique du Bassin houiller de Mons. Lithologie, Flore et Faune du Westphalien C dans la partie occidentale du Massif du Borinage*, in-4° 1951

11. — W. VAN LECKWYCK, F. DEMANET, Y. WILLIÈRE et H. CHAUDOIR, *Étude géologique du gisement houiller d'Andenne-Huy. Le Namurien dans le Bassin d'Andenne*, in-4° 1952

Imprimerie M. HAYEZ, Bruxelles
— 112, rue de Louvain, 112 —
Dom. légal : av. de l'Horizon, 39